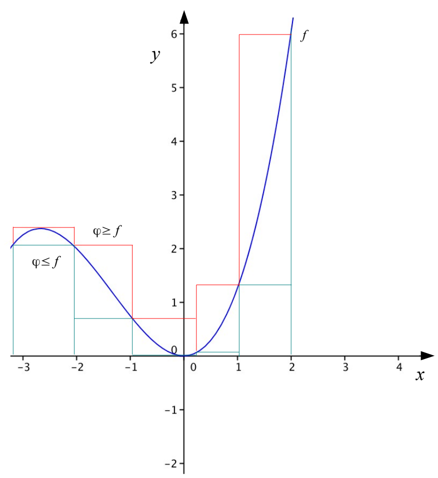
IV, 1–138 (2024)

Mathematik 2 für Ingenieure

Dr. Jürgen Bolik

Technische Hochschule Nürnberg



Inhaltsverzeichnis

1 Differentialrechnung

1.1 Kurven

Definition: Eine *Kurve* im $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung

$$\varphi : I \to \mathbb{R}^n \,,$$

wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein eigentliches oder uneigentliches Intervall ist.

Beispiel

Sei $r, c \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ und $c \neq 0$. Die Kurve

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (r \cos t, r \sin t, ct)$$

ist eine *Schraubenlinie*.

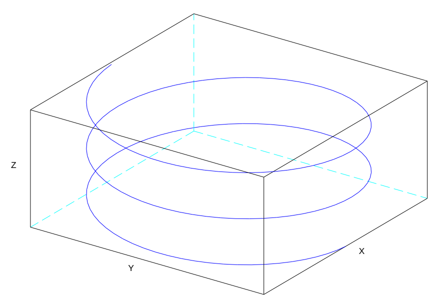


Abbildung 1.1 Schraubenlinie

Definition: Sei

$$\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n) : I \to \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Kurve. Für ein festes $t \in I$ wird

$$\varphi'(t) := (\varphi_1'(t), ..., \varphi_n'(t))$$

der *Tangentialvektor* der Kurve f zum Parameterwert t genannt.

Weiterhin heißt φ *regulär*, falls

$$\varphi'(t) \neq 0 \ \text{ für alle } t \in I \,.$$

Ein Punkt mit $\varphi'(t) = 0$ wird als *singulär* bezeichnet.

Beispiel

Für die *Neilsche Parabel*

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t^2, t^3)$$

gilt

$$\varphi'(t) = (2t, 3t^2)\,.$$

Demnach ist $(x = 0, y = 0)$ der einzige singuläre Punkt der Neilschen Parabel.

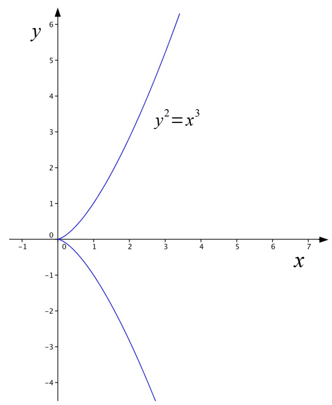


Abbildung 1.2 Neilsche Parabel

Gilt

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2) \ \text{ für } t_1 \neq t_2\,,$$

so heißt $x := \varphi(t_1)$ *Doppelpunkt* der Kurve φ.

Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $y : I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

- für den Tangenteneinheitsvektor τ in einem Punkt $x_0 \in I$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1 + (y'(x_0))^2}}\,(1, y'(x_0))\,.$$

- für den Normaleneinheitsvektor ν in einem Punkt $x_0 \in I$

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + (y'(x_0))^2}}\,(-y'(x_0), 1)\,.$$

Krümmung einer Kurve

Sei

$$s : [a, b] \to [0, L]$$

die Bogenlängenfunktion einer rektifizierbaren Kurve (siehe Abschnitt 2.5.1)

$$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n \ \ t \mapsto \varphi(t) \, .$$

Dann ist s stetig und monoton wachsend. Demnach existiert deren Umkehrfunktion

$$t : [0, L] \to [a, b] \, , \ t \mapsto t(s)$$

und ist ebenfalls stetig und monoton wachsend.

Ist f stetig differenzierbar, so gilt

$$s'(t) = \|\varphi'(t)\| \ \text{ für } t \in [a, b] \, .$$

Wir schreiben nun

$$g(s) := \varphi(t(s)) \, , \ 0 \leq s \leq L \, .$$

Ist $g(s)$ zweimal stetig differenzierbar, so wird

$$\kappa(s) := \|g''(s)\|$$

Krümmung und der Kehrwert von $\kappa(s)$ *Krümmungsradius* genannt.

Es gilt

$$\varphi' = g'(s)s' \, ,$$

und daher

$$\varphi'' = g''(s)s'^2 + g'(s)s'' \, .$$

Da

$$(s'(t))^2 = \|\varphi'(t)\|^2 = \langle \varphi'(t), \varphi'(t) \rangle \, ,$$

folgt

$$2s'(t)s''(t) = \langle \varphi''(t), \varphi'(t) \rangle + \langle \varphi'(t), \varphi''(t) \rangle$$

und daher

$$s's'' = \langle \varphi', \varphi'' \rangle \,.$$

Somit erhalten wir

$$g''(s)s'^4 = \varphi'' s'^2 - g'(s)s''s'^2 = \varphi'' s'^2 - \varphi' s' s'' = \varphi'' s'^2 - \varphi' \langle \varphi', \varphi'' \rangle \,,$$

und demnach

$$\begin{aligned} \|g''(s)\|^2 s'^8 &= \|\varphi''\|^2 s'^4 + \|\varphi'\|^2 \langle \varphi', \varphi'' \rangle^2 - 2\langle \varphi', \varphi'' \rangle^2 s'^2 \\ &= s'^2 (\|\varphi''\|^2 \|\varphi'\|^2 - \langle \varphi', \varphi'' \rangle^2) \,. \end{aligned}$$

Folglich ergibt sich im Kurvenpunkt $x = \varphi(t) \in \mathbb{R}^n$ für die Krümmung

$$\kappa = \frac{\sqrt{\|\varphi''\|^2 \|\varphi'\|^2 - \langle \varphi', \varphi'' \rangle^2}}{\|\varphi'\|^3} \,.$$

Ist $n = 2$ und $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, so schreiben wir

$$\kappa = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \,,$$

wenn wir zusätzlich das Vorzeichen der Krümmung berücksichtigen. Der Wert $|\kappa|$ nach dieser Formel lässt sich mittels

$$\|\varphi''\|^2 \|\varphi'\|^2 = ((x'')^2 + (y'')^2)((x')^2 + (y')^2)$$

und

$$\langle \varphi', \varphi'' \rangle^2 = \langle (x', y'), (x'', y'') \rangle^2 = (x'x'' + y'y'')^2$$

aus der vorangegangenen herleiten.

Beispiele

(i) Für die Kreislinie

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ t \mapsto (r \cos t, r \sin t)$$

erhalten wir

$$\varphi'(t) = r(-\sin t, \cos t) \,, \quad \varphi''(t) = r(-\cos t, -\sin t)$$

und daher

$$\kappa = \frac{1}{r} \,.$$

(ii) Für oben genannte Schraubenlinie

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (r\cos t, r\sin t, ct)$$

gilt

$$\varphi'(t) = (-r\sin t, r\cos t, c)\,,\quad \varphi''(t) = (-r\cos t, -r\sin t, 0)\,,$$

$$\|\varphi'\|^2 = r^2 + c^2\,,\quad \|\varphi''\|^2 = r^2\,,\quad \langle \varphi', \varphi'' \rangle = 0$$

und demnach

$$\kappa = \frac{\|\varphi''\|}{\|\varphi'\|^2} = \frac{r}{r^2 + c^2}\,.$$

Weitere ausgezeichnete Punkte von ebenen Kurven

a) *Wendepunkt*

Ein Punkt P einer ebenen Kurve heißt Wendepunkt, falls

$$\kappa = 0 \ \text{ in } P$$

und κ in P das Vorzeichen wechselt.

Beispiele

(i) Sei

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\quad x \mapsto y(x) = \frac{1}{1 + x^2}\,.$$

Es gilt

$$y'(x) = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2}\,,$$

$$y''(x) = -\frac{2(1 - 3x^2)}{(1 + x^2)^3}\,,$$

$$\kappa = \frac{y''(x)}{(1 + y'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}\,,$$

und die Wendepunkte sind bei

$$x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

(ii) Sei

$$(x, y) = (t - \frac{1}{2}\sin t, 1 - \frac{1}{2}\cos t)\,.$$

Es gilt

$$(x', y') = (1 - \frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t)$$

und

$$(x'', y'') = (\frac{1}{2}\sin t, \frac{1}{2}\cos t)\,.$$

Somit erhalten wir

$$x'y'' - x''y' = \frac{1}{4}(2\cos t - 1)\,,$$

und die Wendepunkte sind bei

$$t_k = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

b) *Scheitelpunkt*

Punkte einer ebenen Kurve, in denen deren Krümmung κ ein Extremum besitzt, heißen *Scheitelpunkte*.

1.2 Differentialrechnung von Funktionen mehrerer unabhängiger Variablen

Funktionen mehrere Variablen treten in der Physik und Chemie sehr häufig auf. Beispielsweise lassen sich

- die Zustandsgleichung idealer Gase

$$pV = nRT$$

- und das Ohmsche Gesetz

$$R = \frac{U}{I}$$

als Funktionen mehrerer Variablen, wie $p(n, V, T)$ oder $U(R, I)$, betrachten.

Dabei wird der Definitionsbereich oft stärker als mathematisch notwendig eingeschränkt, da durch Naturgesetze zusätzliche Restriktionen gegeben sein können. So lässt sich für den Druck $p = p(V, T)$ eines idealen Gases als Definitionsbereich beispielsweise

$$D_p = \{(V, T) \in \mathbb{R}^2 \,|\, T \geq 0, V > 0\}$$

wählen, wenn wir n als konstant voraussetzen.

Der Definitionsbereich D_p lässt sich dann folgendermaßen veranschaulichen

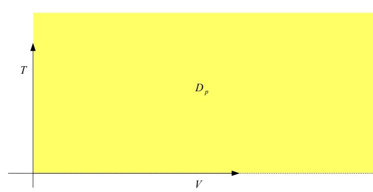


Abbildung 1.3 D_p für ein ideales Gas bei $n = const.$

Der Definitionsbereich einer Funktion mit n reellen Variablen ist eine Punktmenge im $\mathbb{R}^n$. Bei zwei Variablen kann der Definitionsbereich beispielsweise

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

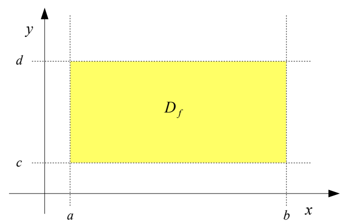


Abbildung 1.4 Rechtecksfläche

oder

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \le r^2\}$$

sein.

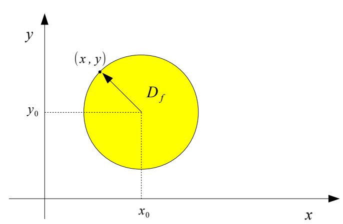


Abbildung 1.5 Kreisfläche

Geometrisch lassen sich Gleichungen wie

$$x + y + z = b \;\text{ mit } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,$$

zu festem $b \in \mathbb{R}$, als Ebenen im $\mathbb{R}^3$ beschreiben.

Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ ist genau dann eine Ebene, wenn es zu $b \in \mathbb{R}$ Zahlen $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ mit $(a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$ gibt, so dass

$$A = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b\}$$

gilt. Da nicht alle Koeffizienten der Ebenengleichung verschwinden, existiert auch eine Darstellung der Form

$$z = z(x, y) .$$

Jedoch müssen Funktionen $f(x, y)$ nicht linear von den Variablen x und y abhängen. Allgemeiner betrachten wir Abbildungen f von Teilmengen $D \subset \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$, d. h.

$$f : D \to \mathbb{R}\,, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) .$$

Der *Graph* von f ist die Menge

$$\Gamma_f := \{(x, y, z) \in D \times \mathbb{R} \,|\, z = f(x, y)\} .$$

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}\,, \quad (x, y) \mapsto z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

für $D = [-10, 10] \times [-10, 10]$.

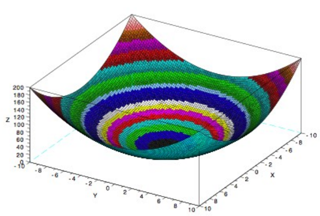


Abbildung 1.6 Graph von $f(x, y) = x^2 + y^2$ (Rotationsparaboloid)

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}\,, \quad (x, y) \mapsto z = f(x, y) = x^3 - y^3$$

für $D = [-3, 3] \times [-3, 3]$.

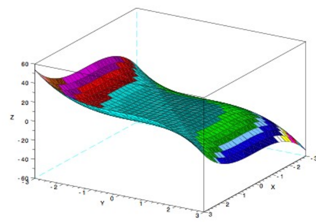


Abbildung 1.7 Graph von $f(x, y) = x^3 - y^3$

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset \mathbb{R}^2$ lässt sich auch durch die Schar $N_f(c)$, $c \in \mathbb{R}$, ihrer *Höhenlinien*

$$N_f(c) := \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = c\} \subset \mathbb{R}^2$$

beschreiben.

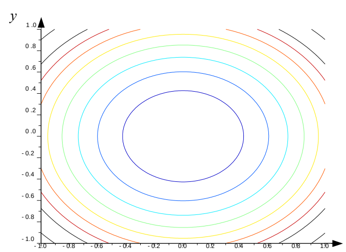


Abbildung 1.8 Höhenlinien von $f(x, y) = x^2 + y^2$

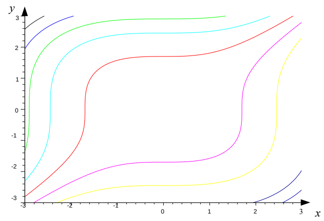


Abbildung 1.9 Höhenlinien von $f(x,y) = x^3 - y^3$

1.2.1 Partielle Ableitungen

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und

$$f : U \to \mathbb{R}$$

eine Funktion. Ferner sei $e_i \in \mathbb{R}^n$ der i-te Einheitsvektor

$$e_i = (0, ..., 1, ..., 0)\,,$$

wobei nur an der i-ten Stelle eine 1, sonst aber nur 0-Einträge auftreten. Die Funktion f heißt im Punkt $x \in U$ *partiell differenzierbar* bezüglich der i-ten Koordinatenrichtung, falls der Limes

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}$$

existiert, wobei $h \in \mathbb{R}^*$ mit $x + he_i \in U$ ist.

Statt $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ schreiben wir auch $\partial_{x_i} f(x)$.
Nehmen wir an, dass für $x = (x_1, ..., x_n) \in U$ nur eine Koordinate variabel ist, die anderen $n-1$ Koordinaten aber fest, so erhalten wir Funktionen

$$\xi \mapsto f_i(\xi) := f(x_1, ..., x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, ..., x_n)\,.$$

Die partielle Ableitung der i-ten Koordinatenrichtung lässt sich dann als gewöhnliche Ableitung von $f_i(\xi)$ formulieren. Demnach gilt

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = f_i'(x_i)$$

und wir können unsere Ergebnisse und Definitionen der Differentialrechnung einer reellen Variablen nutzen.

Beispiele

- Für die partielle Ableitung von

  $$f(x,y) = x + 2xy$$

  nach x erhalten wir

  $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 1 + 2y$$

  und für die partielle Ableitung nach y

  $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x\,.$$

- Für die partielle Ableitung von

  $$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + e^{xy}$$

  nach x erhalten wir

  $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = x + y\,e^{xy}$$

  und für die partielle Ableitung nach y

  $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x\,e^{xy}\,.$$

Höhere Ableitungen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$f : U \to \mathbb{R}$$

eine partiell differenzierbare Funktion. Sind alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}\,, \quad 1 \le i \le n\,,$$

partiell differenzierbar, so heißt f *zweimal partiell differenzierbar*. Entsprechend wird der Begriff *k-mal partiell differenzierbar* erklärt.

Eine übliche Schreibweise für die Ableitungen zweiter Ordnung von f ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

und, falls $i = j$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} .$$

Beispiel

Für die Funktion

$$f(x, y) = \cos x \cdot \sin y$$

erhalten wir für die Ableitungen erster Ordnung

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -\sin x \cdot \sin y \, , \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \cos x \cdot \cos y$$

und für die Ableitungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = -\cos x \cdot \sin y \, , \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = -\sin x \cdot \cos y$$

und

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = -\sin x \cdot \cos y \, , \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = -\cos x \cdot \sin y \, .$$

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt *k-mal stetig partiell differenzierbar*, wenn sie k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ stetig sind.

Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für alle $a \in U$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n \, .$$

Anmerkung: Die Eigenschaft

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

können wir auch für das vorangegangene Beispiel nutzen.

Sei $F : D \to \mathbb{R}$, mit $D \subset \mathbb{R}^2$, eine stetig partiell differenzierbare Funktion. Außerdem sei

$$y : I \to \mathbb{R}\,,$$

wobei $I \subset \mathbb{R}$ und der der Graph von y in D enthalten sei. Dann ist durch

$$F(x, y(x)) = 0\,, \quad x \in I\,,$$

eine Kurve implizit definiert.

Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir

$$\partial_x F(x, y(x)) + \partial_y F(x, y(x))y'(x) = 0\,,$$

wenn wir nach x differenzieren und ∂_x die Ableitung nach der ersten Komponente und ∂_y die Ableitung nach der zweiten Komponente von $F(x, y)$ bedeutet.

Gilt $\partial_y F(x, y(x)) \neq 0$, so folgt nun

$$y'(x) = -\frac{\partial_x F(x, y(x))}{\partial_y F(x, y(x))}\,.$$

1.2.2 Approximation durch affin-lineare Funktionen

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, die im Punkt $(x_0, y_0) \in U$ differenzierbar sei. Dann lässt sich f durch affin-lineare Funktionen

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

approximieren.

Im Falle $n = 1$ haben wir die Funktion durch die Geradengleichung der Tangente approximiert. Hier gehen wir entsprechend vor. Statt der Geradengleichung erhalten wir eine Ebenengleichung.

Wir nennen eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ***Ebene***, wenn es $v, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ gibt, wobei w_1 und w_2 linear unabhängig sind und

$$A = \{u \in \mathbb{R}^n \,|\, u = v + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \ \text{ mit } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

gilt. Kürzer schreiben wir hierfür

$$A = v + \mathbb{R}w_1 + \mathbb{R}w_2\,.$$

Tangentialebene

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine in (x_0, y_0) stetig partiell differenzierbare Funktion.

Wir betrachten die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkte P mit den Koordinaten $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Die beiden linear unabhängigen Vektoren

$$(1, 0, \partial_x f(x_0, y_0)) \text{ und } (0, 1, \partial_y f(x_0, y_0))$$

sind Elemente dieser Tangentialebene.

Daher erhalten wir als *Parameterdarstellung* dieser Ebene

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \lambda(1, 0, \partial_x f(x_0, y_0)) + \mu(0, 1, \partial_y f(x_0, y_0))\,,$$

wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

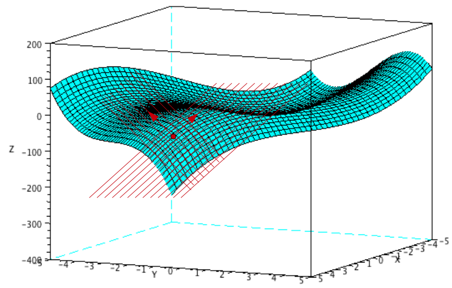


Abbildung 1.10 Tangentialebene

Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Ebene, so wird ein $s \in \mathbb{R}^n$ als *orthogonal* zu A, oder als *Normalenvektor* von A, bezeichnet, wenn für alle $v_1, v_2 \in A$ gilt

$$\langle s, v_1 - v_2 \rangle = 0 \,.$$

Ist $A = v + \mathbb{R}w_1 + \mathbb{R}w_2$, so ist s orthogonal zu A genau dann, wenn
$s \perp w_1$ und $s \perp w_2$ ist.

Der Vektor

$$\vec{n} := \vec{w}_1 \times \vec{w}_2 = (-\partial_x f(x_0, y_0), -\partial_y f(x_0, y_0), 1)$$

ist orthogonal zu unserer Tangentialebene.

Da

$$\langle \vec{n}, ((x, y, z) - (x_0, y_0, f(x_0, y_0))) \rangle = 0$$

gilt, erhalten wir

$$n_x\,(x - x_0) + n_y\,(y - y_0) + n_z\,(z - z_0) = 0\,,$$

wobei $z_0 := f(x_0, y_0)$, und als weitere Darstellung der Tangentialebene in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)\,.$$

Anmerkung: Letztere Darstellung ergibt sich auch unmittelbar aus obiger Parameterdarstellung.

Beispiel

Mit Hilfe unserer Approximation sollen Funktionswerte von

$$z = f(x, y) = \sqrt{x} \cdot y^2$$

in der Umgebung des Punktes $P(1, 2)$ berechnet werden.

Es gilt $f(1, 2) = 4$ und

$$z - 4 = (\frac{y^2}{2\sqrt{x}})_{(1,2)} \triangle x + (\sqrt{x} \cdot 2y)_{(1,2)} \triangle y = 2 \triangle x + 4 \triangle y\,,$$

mit $\triangle x := x - x_0$ und $\triangle y := y - y_0$.

Für $\triangle x = -0,05$ und $\triangle y = 0,06$ erhalten wir nach dieser Approximation

$$f(0,95\,,\ 2,06) = 4 - 2 \cdot 0,05 + 4 \cdot 0,06 = 4,140\,.$$

Setzen wir $x = 0,95$ und $y = 2,06$ stattdessen direkt in $f(x, y)$ ein, so erhalten wir $f(0,95\,,\ 2,06) = 4,136$.

Fehlerrechnung

Um zu bestimmen, wie sich Fehler von Messungen in einer Meßgröße niederschlagen, betrachten wir die jeweilige funktionale Abhängigkeit und bestimmen neben dem resultierenden Mittelwert auch die resultierende Abweichung der Meßgröße im Rahmen einer linearen Approximation.

Dabei nehmen wir an, dass die Messgröße

$$f : U \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)\,,$$

mit $U \subset \mathbb{R}^n$, von $x = (x_1, ..., x_n)$ abhängt. Werte der Variablen x_i werden durch eine Messung bestimmt. Dabei treten Messfehler auf, so dass wir statt x_i die Größe $x_{0i} \pm \triangle x_i$ betrachten.

Die Mittelwerte x_{0i} der Größen x_i legen einen Wert für die Messgröße $f(x)$ fest. Wie sich dabei die Fehler $\triangle x_i$, im Falle $\triangle x_i \ll x_{0i}$ und unkorrelierte Messfehlern, fortpflanzen, zeigen wir nun.

Für $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ können wir, bei kleinen Abweichungen $\triangle x_i$, die Näherung

$$\triangle z = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \triangle x_i\,,$$

für den Wert $f(x) - f(x_0)$, verwenden. Hier schreiben wir x_0 für $(x_{01}, ..., x_{0n})$.

Als *maximalen absoluten Fehler* $\triangle z_{max}$ definieren wir

$$\triangle z_{max} := \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \right| \; |\triangle x_i|\,.$$

Damit steht uns ein einfaches *Fehlerfortpflanzungsgesetz* zur Verfügung.

Beispiele

- Nach der *Zustandsgleichung für ideale Gase,*

  $$pV = nRT\,,$$

  lässt sich beispielsweise der Druck p des idealen Gases als Funktion $p = p(n, V, T)$ schreiben.

  Nach unserer Näherung erhalten wir für $\triangle p$

  $$\triangle p = \frac{\partial p}{\partial V}\triangle V + \frac{\partial p}{\partial T}\triangle T + \frac{\partial p}{\partial n}\triangle n\,.$$

  Mit

  $$\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{nRT}{V^2}\,, \quad \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{nR}{V} \quad \text{und} \quad \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{RT}{V}$$

  und $p_0 = p(n_0, V_0, T_0)$ ergibt sich für den maximalen relativen Fehler

  $$\frac{\triangle p_{max}}{p_0} = \left(\frac{n_0 R T_0}{V_0}\right)^{-1}\left(\frac{n_0 R T_0}{V_0^2}|\triangle V| + \frac{n_0 R}{V_0}|\triangle T| + \frac{R T_0}{V_0}|\triangle n|\right)\,.$$

  Demnach gilt

  $$\frac{\triangle p_{max}}{p_0} = \frac{|\triangle V|}{V_0} + \frac{|\triangle T|}{T_0} + \frac{|\triangle n|}{n_0}\,.$$

  Für

  $$\frac{|\triangle V|}{V_0} = \frac{|\triangle T|}{T_0} = \frac{|\triangle n|}{n_0} = 2\%$$

  erhalten wir somit

  $$\frac{\triangle p_{max}}{p_0} = 6\%\,.$$

- Für den Ohmschen Widerstand gilt

  $$R = \frac{U}{I}\,.$$

  Hier erfolgt die Messung des Widerstandes R anhand einer Messung der Spannung U und der Stromstärke I.

  Um den maximalen relativen Fehler von $R = R(U, I)$ abzuschätzen, nutzen wir die Beziehung

  $$\frac{\triangle R_{max}}{R_0} = \left|\frac{\triangle U}{U_0}\right| + \left|\frac{\triangle I}{I_0}\right|\,.$$

  Somit erhalten wir für $I = (10 \pm 0,3)\,A$ und $U = (220 \pm 2)\,V$

  $$R_0 = \frac{U_0}{I_0} = 22,0\,\Omega \quad \text{und} \quad \frac{\triangle R_{max}}{R_0} \approx 4\%\,.$$

1.2.3 Lokale Extrema im $\mathbb{R}^n$

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ein Punkt $x_0 \in U$ heißt *lokales Extremum*, oder genauer *lokales Maximum* oder *lokales Minimum* von f, falls es eine Umgebung $V \subset U$ gibt, so dass,

- im Falle eines lokalen Maximums,

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in V\,,$$

- und im Falle eines lokalen Minimums,

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ für alle } x \in V\,,$$

  gilt.

Sofern zusätzlich $f(x) = f(x_0)$ nur für $x = x_0$ gilt, so wird das jeweilige lokale Extremum als *isoliert* bezeichnet.

Definition: Sei $A = (a_{ij})$ eine reelle Matrix mit $1 \leq i, j \leq n$ und $a_{ij} = a_{ji}$. Ferner sei $\langle ., . \rangle$ das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Dann heißt A

- *positiv definit,* falls

$$\langle \xi, A\xi \rangle > 0 \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}\,,$$

- *positiv semidefinit,* falls

$$\langle \xi, A\xi \rangle \geq 0 \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n\,,$$

- *negativ definit*, bzw. *negativ semidefinit*, falls die Matrix $-A$ *positiv definit*, bzw. *positiv semidefinit* ist,

- und *indefinit,* falls es Vektoren $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$\langle \xi, A\xi \rangle > 0 \text{ und } \langle \eta, A\eta \rangle < 0$$

  gilt.

Definition: Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ferner sei f eine stetig partiell differenzierbare Funktion. Unter dem *Differential*, der *Jacobi-* oder *Funktional-Matrix* von f im Punkte $x \in U$ wird der Term

$$(Df)(x) := J_f(x) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_l}(x)\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le l\le n}}$$

verstanden.

Anmerkung: Für $m = 1$ ist das ist ein Element aus $\mathbb{R}^n$ (Vektor). Der Ausdruck

$$\text{grad } f(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_l}(x)\right)_{1\le l\le n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

heißt *Gradient*.

Der Vektor grad $f(x)$ gibt die Richtung des stärksten Anstiegs von f an und steht senkrecht auf den Höhenlinien.

Für Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset \mathbb{R}^2$ lässt sich der Gradient sehr einfach veranschaulichen:

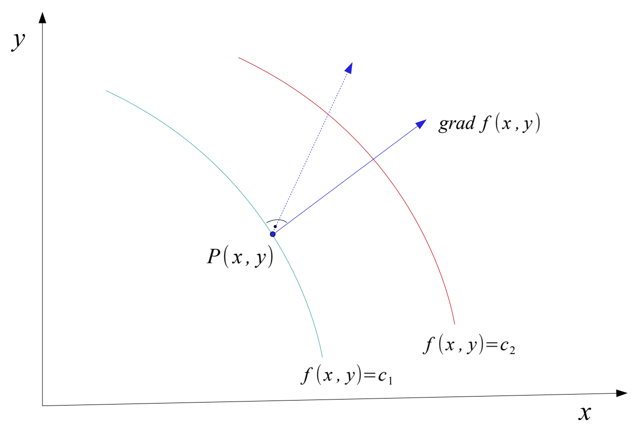


Abbildung 1.11 Gradient grad $f(x, y)$

Definition: Sei $f : U \to \mathbb{R}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Außerdem sei f eine stetig partiell differenzierbare Funktion und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $\|v\| = 1$. Unter der *Richtungsableitung* von f im Punkt x in Richtung v versteht man den Differentialquotienten

$$D_v f(x) := \frac{d}{dt} f(x + tv)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} .$$

Es gilt

$$D_v f(x) = \langle v, \text{grad } f(x) \rangle \,.$$

Ist grad $f(x) \neq 0$ und ϑ der Winkel zwischen v und grad $f(x)$, dann gilt

$$D_v f(x) = \|\text{grad } f(x)\| \cos \vartheta \,.$$

Anmerkung: Verzichten wir auf die Normierungsbedingung, so können wir, bei leicht veränderter Notation, für die Richtungsableitung von $f : U \to \mathbb{R}$, mit $U \subset \mathbb{R}^2$, auch

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}} f(x,y) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot \text{grad } f(x,y)$$

schreiben.

Definition: Sei $f : U \to \mathbb{R}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ferner sei f eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Als *Hesse-Matrix* von f im Punkte $x \in U$ wird der folgende Term bezeichnet:

$$(H_f)(x) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_m}(x) \right)_{\substack{1 \le l \le n \\ 1 \le m \le n}} \,.$$

Anmerkung: Die Hesse-Matrix ist ein Element aus $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ferner sei f eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$f(x + \xi) = c + \langle a, \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi, A\xi \rangle + o(\|\xi\|^2) \,,$$

wobei $x \in \mathbb{R}^n$,

$$c := f(x) \,, \; a := (\text{grad } f)(x) \,, \; A = H_f(x) \,.$$

Dabei bezeichnet $o(\|\xi\|^2)$ eine Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$ mit $\varphi = 0$ und

$$\lim_{\substack{\xi \to 0 \\ \xi \neq 0}} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^2} = 0 \,.$$

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ferner sei f eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion und $x \in U$ ein Punkt mit

$$\text{grad } f(x) = 0 \,.$$

- Ist die Matrix $(H_f)(x)$ *positiv definit*, so hat f in x ein *isoliertes lokales Minimum*.
- Ist $(H_f)(x)$ *negativ definit*, so hat f in x ein *isoliertes lokales Maximum*.
- Ist die Matrix $(H_f)(x)$ *indefinit*, so hat f in x kein lokales Extremum.

Anmerkung: Einen Punkt, in dem der Gradient verschwindet, bezeichnen wir als *kritischen Punkt*.

1.2.4 Lokale Extrema im $\mathbb{R}^2$

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ und $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge. Ein Punkt $x_0 = (x_{01}, x_{02}) \in U$ heißt *lokales Extremum*, oder genauer *lokales Maximum* oder *lokales Minimum* von f, falls es eine Umgebung $V \subset U$ gibt, so dass,

- im Falle eines lokalen Maximums,

  $$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in V ,$$

- und im Falle eines lokalen Minimums,

  $$f(x_0) \leq f(x) \text{ für alle } x \in V ,$$

  gilt.

Sofern zusätzlich $f(x) = f(x_0)$ nur für $x = x_0$ gilt, so wird das jeweilige lokale Extremum als *isoliert* bezeichnet.

Der Ausdruck

$$\text{grad } f(x_1, x_2) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2), \, \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right)$$

heißt *Gradient*. Der Vektor grad $f(x_1, x_2)$ besteht hier aus zwei Komponenten und wir können statt grad $f(x_1, x_2) = 0$ auch

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0 \text{ und } \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$$

schreiben.

Definition: Sei $f : U \to \mathbb{R}$ und $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge. Ferner sei f eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Als *Hesse-Matrix* von f im Punkte $x = (x_1, x_2) \in U$ wird der folgende Term bezeichnet:

$$(H_f)(x_1, x_2) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_m}(x_1, x_2) \right)_{\substack{1 \leq l \leq 2 \\ 1 \leq m \leq 2}} .$$

Für die Formulierung der Hesse-Matrix $H_f(x_1, x_2)$ sind einige Abkürzungen sinnvoll:

$$a_{11} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2)\,, \;\; a_{12} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2)\,,$$
$$a_{21} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2)\,, \;\; a_{22} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2)\,.$$

Mit dieser Schreibweise erhalten wir

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\,.$$

Wenn f eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion ist, gilt außerdem

$$a_{21} = a_{12}\,.$$

Satz: Sei $f : U \to \mathbb{R}$ und $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge. Ferner sei f eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion und $x = (x_1, x_2) \in U$ ein Punkt mit

$$\text{grad } f(x_1, x_2) = 0\,.$$

- Gilt $\det(H_f(x_1, x_2)) > 0$ und $a_{11} > 0$,
  so hat f in x ein *isoliertes lokales Minimum*.
- Gilt $\det(H_f(x_1, x_2)) > 0$ und $a_{11} < 0$,
  so hat f in x ein *isoliertes lokales Maximum*.
- Gilt $\det(H_f(x_1, x_2)) < 0$,
  so hat f in x kein lokales Extremum.

Im folgenden Abschnitt schreiben wir der Einfachheit halber D statt $\det(H_f(x_1, x_2))$.

Anmerkung

Für Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ mit beispielsweise $f(x, y) = x^2 + y^4$ oder $f(x, y) = x^2 + y^3$, lassen sich unsere Kriterien nicht anwenden.

Für beide Funktionen gilt

$$\text{grad } f(0, 0) = (0, 0)$$

und

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Während jedoch die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^4$ im Nullpunkt ein isoliertes lokales Minimum besitzt, hat $f(x, y) = x^2 + y^3$ dort kein lokales Extremum.

Beispiele

- Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$(x, y) \mapsto z = f(x, y) = x^2 - 2x + 1 + y^2 = (x-1)^2 + y^2 \,.$$

Für die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung erhalten wir

$$\partial_x f(x,y) = 2x - 2\,, \quad \partial_y f(x,y) = 2y$$

und

$$\partial_x^2 f(x,y) = 2,\ \partial_y \partial_x f(x,y) = 0,\ \partial_y^2 f(x,y) = 2\,.$$

Die Bedingung

$$\partial_x f(x,y) = \partial_y f(x,y) = 0$$

für einen kritischen Punkt impliziert, dass

$$2x - 2 = 0 \ \text{ und } \ 2y = 0\,.$$

Daher ist $P(1,0)$ der einzige kritische Punkt. Da außerdem für P

$$D > 0 \ \text{ und } \ a_{11} = \partial_x^2 f(x,y) = 2 > 0$$

gilt, besitzt f in P ein lokales Minimum.

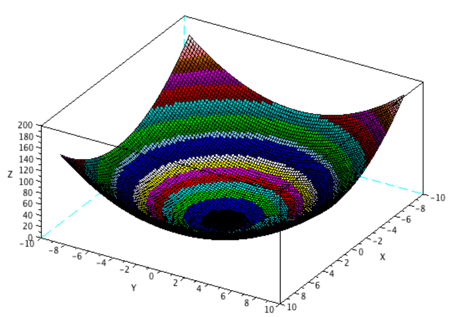


Abbildung 1.12 Graph von $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$

- Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

  $$(x, y) \mapsto z = f(x, y) = x^2 - y^2$$

  verschwindet der Gradient lediglich bei $(x, y) = (0, 0)$, da

  $$\partial_x f(x, y) = 2x \text{ und } \partial_y f(x, y) = -2y\,.$$

  Ferner gilt

  $$\partial_x^2 f(x, y) = 2,\ \partial_y \partial_x f(x, y) = 0,\ \partial_y^2 f(x, y) = -2\,.$$

  Daher gilt $D < 0$ und f besitzt im Punkt $(0, 0)$ kein lokales Extremum. Der Graph von f ist eine sog. Sattelfläche.

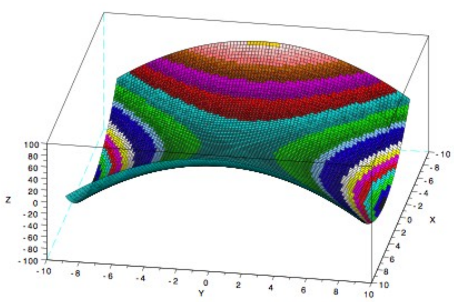


Abbildung 1.13 Graph von $f(x, y) = x^2 - y^2$

- Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

  $$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3\,.$$

  Für die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung erhalten wir

  $$\partial_x f(x, y) = 3x^2 - 3y\,,\quad \partial_y f(x, y) = -3x + 3y^2$$

  und

  $$\partial_x^2 f(x, y) = 6x,\ \partial_y \partial_x f(x, y) = -3,\ \partial_y^2 f(x, y) = 6y\,.$$

  Die Bedingung

  $$\partial_x f(x, y) = \partial_y f(x, y) = 0$$

für einen kritischen Punkt impliziert, dass

$$y = x^2 \;\text{ und }\; x = y^2 \,.$$

Betrachten wir $x = x^4$, so erhalten wir, wegen $x(1 - x^3) = 0$, die Nullstellen $x = 0$ und $x = 1$ und damit die kritischen Punkte $P(0,0)$ und $Q(1,1)$.

Da im Punkt P

$$D = -9 < 0$$

gilt, hat die Funktion f in P kein lokales Extremum.

Im Punkt Q gilt

$$D = 27 > 0 \;\text{ und }\; a_{11} = \partial_x^2 f(x,y) = 6 > 0 \,,$$

so dass dort ein lokales Minimum vorliegt.

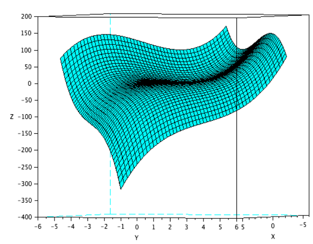


Abbildung 1.14 Graph von $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

1.3 Übungsaufgaben: Differentialrechnung

Aufgabe 1
Bestimmen Sie die Tangenten der Kurven in $t_0 = 0$. Sind die Kurven regulär? Handelt es sich um Jordan-Kurven (stetige, schnittpunktfreie Kurven mit Anfangs- und Endpunkt)?

a) $\alpha(t) = (\cos t, \sin(2t))\,,\ t \in \mathbb{R}\,,$

b) $\alpha(t) = (t \sin t, t\cos(2t), \sqrt{3}\,t)\,,\ t \in \mathbb{R}\,,$

c) $\alpha(t) = (\sqrt{2}\,t, e^t, e^{-t})\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$

Aufgabe 2
Gegeben sei $c \in \mathbb{R}^*$ und mit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\quad f(t) := (e^{ct}\cos t, e^{ct}\sin t)$$

die *logarithmische Spirale*.

a) Skizzieren Sie die Kurve für $c = (2\pi)^{-1}$ und $-2\pi \le t \le 2\pi$.

b) Bestimmen Sie die Krümmung $\kappa(t)$.

Aufgabe 3
Skizzieren Sie folgende Punktmengen D:

a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \le (x-2)^2 + (y+1)^2 \le 9\}\,,$

b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| < 1\}\,,$

c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x < 1 \wedge -x < y < 2x\}\,.$

Aufgabe 4
Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$ der Funktionen

$$f : D \to \mathbb{R}\,,\quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

mit

a) $f(x,y) = \sqrt{y-2x}\,,$ b) $f(x,y) = \sqrt{(x^2-1)(9-y^2)}\,,$ c) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y}}{x-y}\,,$

d) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}\,,$ e) $f(x,y) = \sqrt{2x-2y}\,.$

und skizzieren Sie jeweils die Punktmenge D.

Aufgabe 5
Untersuchen Sie die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}\,,\ (x,y) \mapsto f(x,y)$ mit

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy(y^2-x^2)}{x^2+y^2} & \text{falls} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \exp(\dfrac{y}{x^2+y^2}) & \text{falls} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ e & \text{falls} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

auf Stetigkeit im Ursprung.

Aufgabe 6
Beschreiben Sie die Höhenlinien folgender Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad (x,y) \mapsto f(x,y)$$

jeweils als Kurven, die sich als Kegelschnitte definieren lassen. Es sei

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1\,,$ b) $f(x,y) = x^2 - y^2\,,$

c) $f(x,y) = xy\,,$ d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 1 + 2y^2\,.$

Aufgabe 7
Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung folgender Funktionen

$$f : D \to \mathbb{R}\,, \quad (x,y) \mapsto f(x,y)$$

mit

a) $f(x,y) = x^2 + xy - y^2 + 2x\,,$ b) $f(x,y) = (3x-4y)^4\,,$ c) $f(x,y) = \arctan \dfrac{x}{y}\,,$

d) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x+y}\,,$ e) $f(x,y) = \exp(xy)\,.$

Aufgabe 8

a) Welche Steigung besitzt die Kurve, die durch die Gleichung

$$(x^2+y^2)^2 - 2x(x^2+y^2) - y^2 = 0$$

beschrieben wird im Kurvenpunkt $P(0,1)$?

b) Bestimmen Sie die Tangentensteigung im Punkt $P(x,y)$ der mittels

$$F(x,y) = b(x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0$$

implizit gegebenen Funktion mit $y = y(x)$ und wählen Sie b so, dass der Graph von $y(x)$ im Punkt $P(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ eine waagrechte Tangente besitzt.

Aufgabe 9
Berechnen Sie die Steigung an die Ellipse

$$\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

in $(x_0, y_0) = (5 + 2\sqrt{2}, 3 + \sqrt{2})$ und bestimmen Sie die Gleichung der Tangente.

Aufgabe 10
Sei eine Kurve $y(x)$ gegeben durch

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x + 4y - 12 = 0\,.$$

In welchen Punkten besitzt diese Kurve Tangenten parallel zur x-Achse und in welchen Punkten Tangenten parallel zu y-Achse?

Aufgabe 11
Eine Kurve $y(x)$ ist implizit gegeben durch

$$F(x,y) = y^2 + x^3 + 2x - 6 = 0\,.$$

Bestimmen Sie den zu $x_0 = -1$ gehörenden Kurvenpunkt $P(x_0, y_0)$ mit $y_0 > 0$. Geben Sie die Gleichung der Tangenten und der Normalen jeweils im Punkt P an.

Aufgabe 12
Berechnen Sie die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $f : D \to \mathbb{R}$, mit $D \subset \mathbb{R}^2$ und

a) $f(x,y) = \ln(x^2 + y)\,,$

b) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}\,,$

c) $f(x,y) = \cos(3xy)\,,$

d) $f(x,y) = \arctan\dfrac{x}{y}\,,$

e) $f(x,y) = e^{-x+y} + \ln\dfrac{x}{y}\,.$

Aufgabe 13
Geben Sie jeweils die Koordinatendarstellung der Tangentialebene folgender
Funktionen

$$f : D \to \mathbb{R}\,, \quad (x,y) \mapsto f(x,y)\,,$$

$D \subset \mathbb{R}^2$, im Punkt $P(x, y, f(x,y))$ an. Es sei

a) $f(x,y) = x^2 e^{xy}\,, \quad P(1, 0, f(1,0))\,,$

b) $f(x,y) = \ln(\dfrac{x}{y})\,, \quad P(-2, -5, f(-2,-5))\,.$

Aufgabe 14
Geben Sie jeweils die Parameter- und Koordinatendarstellung der Tangentialebene folgender
Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad (x,y) \mapsto f(x,y)$$

im Punkt $P(x, y, f(x,y))$ an. Es sei

a) $f(x,y) = x^2 + xy - y^2 + 2x\,, \;\; P(1, 1, f(1,1)),$

b) $f(x,y) = (x^2 + y^2)\exp(-x)\,, \;\; P(0, 1, f(0,1)),$

c) $f(x,y) = \sin(x+y)\,, \;\; P(\pi, -\pi, f(\pi, -\pi))$

d) $f(x,y) = \sin x \cdot \cos y\,, \;\; P(\pi, 0, f(\pi, 0)).$

Aufgabe 15
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in y-Richtung im Punkt $(1, 1, \ln 2)$ an die durch $z = \ln(x + y^2)$ gegebene Fläche.

Aufgabe 16
In einem rechtwinkligen Dreieck wurden der Winkel $\alpha = (32,0 \pm 0,5)^\circ$ und die Hypotenuse $c = (8,0 \pm 0,2)\,cm$ gemessen. Bestimmen Sie die Gegenkathete a und deren maximalen relativen Fehler.

Aufgabe 17
Die Vermessung eines Dreiecks ergab für die Grundseite c und die beiden anliegenden Winkel folgende Werte

$$c = (10 \pm 0,1)\,m\,,\ \alpha = \frac{\pi}{4} \pm 0,005 \text{ und } \beta = \frac{\pi}{4} \pm 0,002\,.$$

Berechnen Sie den maximalen absoluten und relativen Fehler für die Dreiecksfläche A mittels

$$A = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin(\alpha + \beta)}\,.$$

Aufgabe 18
Die Vermessung eines Dreiecks ergab für die Seiten x und y die Werte

$$x = (150 \pm 0,2)\,m\,,\ y = (200 \pm 0,2)\,m$$

und für den eingeschlossenen Winkel

$$\alpha = 60^\circ \pm 1^\circ\,.$$

Berechnen Sie den maximalen absoluten und relativen Fehler für die Dreiecksfläche A mittels

$$A = \frac{1}{2}xy\sin\alpha\,.$$

Aufgabe 19
Aus der Optik ist folgendes Gesetz bekannt:

> Zwischen der Brennweite f einer Konvexlinse, der Gegenstandsweite g und der Bildweite b besteht der Zusammenhang
>
> $$f = \frac{bg}{b + g}\,.$$
>
> Berechnen Sie $f \pm \triangle f$ nach der Fehlerrechnung für die Messwerte
>
> $$b = 3{,}0 \pm 0{,}1\,[cm],\ g = 7{,}0 \pm 0{,}2\,[cm]\,.$$

Aufgabe 20
Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ (x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy$$

und $P_0(1, 2)$. Berechnen Sie

a) grad f ,

b) die Richtungsableitung von f in P_0 in den Richtungen $(2, 3)$, $(-1, -3)$, $(3, 2)$, $(3, 1)$, $(-2, -3)$, $(-3, -1)$ und $(-1, 3)$,

c) die größtmögliche Richtungsableitung von f in P_0 und deren Wert an,

d) die Höhenlinien für die Niveaufläche durch P_0.

Aufgabe 21
Sei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,,\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = 2xy^2 - yz^2$$

und $P(2, 1, -1)$.

a) Bestimmen Sie

$$\frac{\partial}{\partial \vec{a}} f(2, 1, -1) \ \text{ mit } \ \vec{a} = (3, 0, 1)\,.$$

b) Bestimmen Sie

$$\frac{\partial}{\partial \vec{b}} f(2, 1, -1) \ \text{ mit } \ \vec{b} = -\vec{a}\,.$$

c) In welcher Richtung $\vec{c}$ ist die Richtungsableitung am größten / kleinsten? Geben Sie die jeweiligen Werte an.

d) Berechnen Sie die Gleichung der Niveaufläche durch P.

Aufgabe 22
Geben Sie jeweils ein Taylorpolynom zweiter Ordnung von f an und untersuchen Sie auf Extrema, wobei

a) $f(x,y) = x^3y^2(1-x-y)\,,$

b) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)\,,$

c) $f(x,y) = \exp(-(x^2+y^2))\,,$

d) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + xy^2 - 4xy + 1\,.$

Aufgabe 23
Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktionen

$$f : D \to \mathbb{R}\,, \quad (x,y) \mapsto f(x,y)$$

mit

a) $f(x,y) = 2(x+1)^2 + (y+1)^2\,,$

b) $f(x,y) = 3xy^2 + 4x^3 - 3y^2 - 12x^2 + 1\,,$

c) $f(x,y) = (x^2+y^2)\exp(-x)\,,$

d) $f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 3y^3 + 1\,,$

e) $f(x,y) = xy\exp(2-x-y)\,,$

f) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)\,,$

g) $f(x,y) = \dfrac{1}{27}\,xy + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\,.$

Aufgabe 24

a) Zeigen Sie, dass

$$f(x,y) = \frac{xy}{x-y}\,, \quad \text{mit } x \neq y\,,$$

die partielle Differentialgleichung

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass das Gravitationspotential

$$V = -\frac{k}{r}\,, \quad \text{mit } r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \neq 0\,,$$

die Laplace-Gleichung

$$\triangle V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

erfüllt.

2 Integralrechnung

2.1 Das Riemannsche Integral

Das Riemannsche Integral geeigneter Funktionen und Intervalle wird im Rahmen eines Grenzwertprozesses für Treppenfunktionen eingeführt.

Treppenfunktionen

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine Funktion

$$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$$

heißt *Treppenfunktion*, falls es eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

des Intervalls $[a, b]$ und Konstanten $c_k \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\varphi(x) = c_k \text{ für alle } x \in (x_{k-1}, x_k) \text{ mit } 1 \le k \le n\,.$$

Die Funktionswerte $\varphi(x_k)$ sind beliebig.

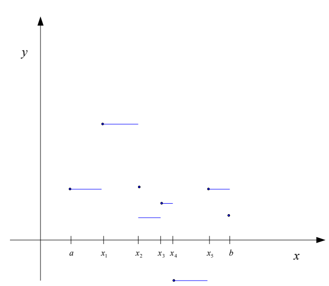


Abbildung 2.1 Treppenfunktion und Unterteilung des Intervalls

Das Integral für Treppenfunktionen

Sei φ eine Treppenfunktion, die hinsichtlich der Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

so definiert ist, dass

$$\varphi\big|_{(x_{k-1}, x_k)} = c_k \text{ für } k = 1, \ldots, n\,.$$

Dann wird

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx := \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$$

definiert. Die Menge aller Treppenfunktionen $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $T[a,b]$.

Definition: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann wird das Oberintegral als

$$\int\limits_a^{b\,*} f(x)\,dx := \inf\left\{ \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx \mid \varphi \in T[a,b], \varphi \geq f \right\}$$

und das Unterintegral als

$$\int\limits_{a\,*}^{b} f(x)\,dx := \sup\left\{ \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx \mid \varphi \in T[a,b], \varphi \leq f \right\}$$

bezeichnet. Dabei heißt eine reelle Zahl

- *Supremum sup*, falls sie die kleinste obere und
- *Infimum inf*, falls sie die größte untere Schranke ist.

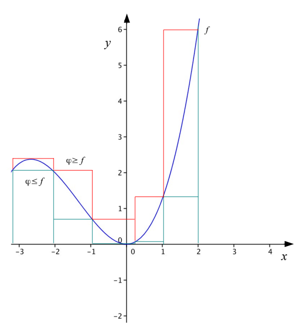


Abbildung 2.2 Treppenfunktionen und Integration

Definition: Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar*, wenn

$$\int\limits_a^{b\,*} f(x)\,dx = \int\limits_{a\,*}^{b} f(x)\,dx$$

gilt. Dann wird

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx := \int\limits_a^{b\,*} f(x)\,dx$$

gesetzt.

Beispiele

- Treppenfunktionen $\varphi \in T[a,b]$ sind Riemann-integrierbar.
- Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

  ist nicht Riemann-integrierbar, da

$$\int_0^{1^*} f(x)\,dx = 1 \;\text{ und }\; \int_{0_*}^{1} f(x)\,dx = 0\,.$$

Im folgenden Abschnitt schreiben wir statt Riemann-integrierbar lediglich integrierbar.

Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Das lässt sich mit Hilfe der Approximierbarkeit stetiger Funktionen und der Ober- und Unterintegrale durch Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T[a,b]$, mit $\varphi \le f \le \psi$, und die jeweiligen Ober- und Untersummen zeigen.

Mit dieser Eigenschaft lässt sich auch der folgende Satz beweisen.

Jede monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Linearität und Monotonie des Integrals

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f+g$ und λf integrierbar und es gilt:

(i) $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$

(ii) $\displaystyle\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx,$

(iii) Ist $f \le g$, so gilt $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ jeweils stetige Funktionen und $g \geq 0$, so existiert ein $\xi \in [a, b]$, so dass

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)\,dx\,.$$

Intervallgrenzen

Sei $a < b < c$ und $f : [a, c] \to \mathbb{R}$. Die Funktion f genau dann integrierbar, wenn $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ integrierbar sind. Dann gilt

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx\,.$$

Definition

- Für identische obere und untere Intervallgrenze a wird

  $$\int\limits_a^a f(x)\,dx := 0$$

  gesetzt.

- Die Integration $\int\limits_a^b f(x)dx$ kann für $b < a$ mittels

  $$\int\limits_a^b f(x)dx := -\int\limits_b^a f(x)\,dx$$

  behandelt werden.

2.2 Integration und Differentiation

Betrachten wir statt des Integrals

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

einer integrierbaren Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, das entsprechende Integral mit einer variablen Integrationsgrenze $x \in (a,b]$, so erhalten wir die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

2.2.1 Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

Eine differenzierbare Funktion

$$F : I \to \mathbb{R}$$

heißt *Stammfunktion* einer Funktion

$$f : I \to \mathbb{R}\,,$$

falls f die Ableitung der Funktion F, d. h.

$$F' = f$$

ist.

Beispiel

Die Funktion

$$F(x) = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

ist Stammfunktion von $f(x) = x^n$.

Sei $F : I \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von $f : I \to \mathbb{R}$ Eine weitere Funktion $G : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann Stamfunktion von f, wenn

$$F(x) - G(x) = c \;\text{ für } x \in I\,,$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$, gilt.

Beweis

(i) Sei $F - G = c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt $G' = (F - c)' = F' = f$.

(ii) Sei G Stammfunktion von f. Demnach gilt $G' = f = F'$ und daher $(F - G)' = 0$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist $F - G = c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetig Funktion und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \;\text{ mit } a, b \in I\,.$$

Beweis

Definieren wir

$$F_0(x) := \int_a^x f(t)\,dt \;\text{ mit } x \in I\,,$$

so ist $F_0 : I \to \mathbb{R}$ mit

$$F_0(a) = 0 \;\text{ und }\; F_0(b) = \int_a^b f(t)\,dt\,.$$

Weiterhin gilt, für $h \neq 0$,

$$\frac{F_0(x+h) - F_0(x)}{h} = \frac{1}{h}\Big(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\Big) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\,.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert ein $\xi_h \in [x, x+h]$, sofern $h > 0$, bzw. ein $\xi_h \in [x+h, x]$, sofern $h < 0$, mit

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = hf(\xi_h)\,.$$

Da

$$\lim_{h\to 0} \xi_h = x$$

gilt und f stetig ist, zeigt sich, mit

$$F_0'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(hf(\xi_h)) = f(x)\,,$$

dass F_0 eine Stammfunktion von f ist.

Eine beliebige Stammfunktion F von f kann sich von F_0 nur durch eine additive Konstante $c \in \mathbb{R}$ unterscheiden. Daher gilt

$$F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = F_0(b) = \int\limits_a^b f(t)\,dt\,.$$

Beispiel

Eine einfache Integration ist bereits erforderlich, soll die entlang eines Weges verrichtete Arbeit berechnet werden, wenn die Kraft in Wegrichtung nicht konstant ist.

Das ist beispielsweise in der Elektrostatik der Fall, wenn wir die Arbeit W berechnen, die bei beliebigen Verschiebungen einer Ladung q im Coulomb-Feld F einer Ladung Q verrichtet wird. Soll sich deren Ort vom Abstand r_1 auf den Abstand r_2 in Feldrichtung verändern, so erhalten wir

$$W_{12} = -\int\limits_{r_1}^{r_2} F(r)\,dr = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2}\,dr = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}\Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1})\,.$$

2.2.2 Integrationsmethoden

Substitutionsregel

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und

$$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi([a, b]) \subset I$. Dann gilt

$$\int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx\,.$$

Beweis

Sei $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gilt nach der Kettenregel

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,.$$

Nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechung erhalten wir daher

$$\int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = (F \circ \varphi(t))\Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx\,.$$

Beispiele zur Substitutionsregel

- Wir erhalten
  $$\int \frac{1}{2+3t}\,dt = \frac{1}{3}\ln|2+3t| + C\,,\quad \text{wobei } t \neq -\frac{2}{3}\,,$$
  mit Hilfe der Substitution $\varphi(t) := 2 + 3t$,
- und
  $$2\int t\,e^{t^2}\,dt = e^{t^2} + C$$
  mittels $\varphi(t) := t^2$.

Einige Substitutionen

- Für Integrale der Form $\int f(ax+b)\,dx$, mit $a \neq 0$, erhalten wir
  $$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(u)\,du\,.$$

- Für Integrale der Form $\int f(x) \cdot f'(x)\,dx$ erhalten wir

$$\int f(x) \cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{2}(f(x))^2 + C\,.$$

Beispiel: $\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C_1 = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C_2$

- Für Integrale der Form $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ erhalten wir

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C\,.$$

Beispiel: $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$

- Ist f eine rationale Funktion, so werden Integrale der Form

$$\int f(x, \sqrt{1-x^2})\,dx \ \text{ beispielsweise mittels } \ x =: \cos u$$

umgeformt. Dabei erhalten wir

$$\int f(x, \sqrt{1-x^2})\,dx = -\int f(\cos u, |\sin u|)\ \sin u\,du\,.$$

Beispiel: Mit $x =: \cos u$, $0 \le u \le \pi$, erhalten wir

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = -\int \sin^2 u\,du = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arccos x + C\,.$$

- Ist f eine rationale Funktion, so werden Integrale der Form

$$\int f(x, \sqrt{x^2-1})\,dx \ \text{ beispielsweise mittels } \ x =: \cosh u$$

umgeformt. Dabei erhalten wir

$$\int f(x, \sqrt{x^2-1})\,dx = \int f(\cosh u, |\sinh u|)\ \sinh u\,du\,.$$

Tritt hierbei $\sqrt{1+x^2}$ statt $\sqrt{x^2-1}$ auf, so ist beispielsweise die Substitution

$$x =: \sinh u$$

sinnvoll.

Partielle Integration

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b g(x)f'(x)\,dx\,.$$

Beweis

Nach der Produktregel erhalten wir für die Ableitung von $F := fg$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

und mit dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int\limits_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = f(x)g(x)\Big|_a^b\,.$$

Beispiele zur partiellen Integration

- Für $\displaystyle\int x\,e^{ax}\,dx$ gilt

  $$\int x\,e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} \cdot x - \frac{1}{a}\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a^2}\,e^{ax}(ax-1) + C\,,$$

- für $\displaystyle\int \ln x\,dx$, mit $x > 0$, gilt

  $$\int \ln x\,dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x \cdot \ln x - x + C$$

- und für $\displaystyle\int x\arctan(\frac{x}{a})\,dx$ gilt

  $$\begin{aligned}\int x\arctan(\frac{x}{a})\,dx &= \frac{x^2}{2}\arctan(\frac{x}{a}) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2} \cdot \frac{1}{a}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan(\frac{x}{a}) - \frac{a}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{a^2+x^2}\,dx\,,\end{aligned}$$

  was sich mittels

  $$\frac{x^2}{a^2+x^2} = \frac{x^2+a^2-a^2}{a^2+x^2} = 1 - \frac{a^2}{a^2+x^2} = 1 - \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}$$

  umformen lässt zu

  $$\int x\arctan(\frac{x}{a})\,dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\arctan(\frac{x}{a}) - \frac{a}{2}x + C\,.$$

Partialbruchzerlegung

Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$,

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

und

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m$$

Polynome mit reellen Koeffizienten. Ferner sei $D := \{x \in \mathbb{R} \,|\, q(x) \neq 0\}$. Dann heißt die Funktion

$$r : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

rationale Funktion.

Lässt sich r nur mit Nennerpolynomen des Grades $m > 0$ darstellen, so werden die Funktionen r auch als *gebrochenrationale Funktionen* bezeichnet.

Polynomdivision: Seien p und q Polynome und r eine rationale Funktion. Dann gibt es ein Polynom p_0 und ein Polynom p_r, dessen Grad kleiner als der Grad von q ist, so dass

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = p_0(x) + \frac{p_r(x)}{q(x)}\ .$$

Die rationale Funktion $\frac{p_r(x)}{q(x)}$ wird auch als echt gebrochen bezeichnet. Das ist eine rationale Funktion, deren Zählerpolynom einen kleineren Grad als deren Nennerpolynom hat.

Sei $\frac{p_r(x)}{q(x)}$ echt gebrochen und $b_m = 1$.
Nach dem Faktorisierungssatz lässt sich das Polynom $q(x)$ als Produkt von Faktoren der Form $(x-a)^k$ und $(x^2+px+q)^l$, mit $p^2 - 4q < 0$, darstellen.

- Zu jedem Faktor der Form $(x-a)^k$ gehören die Brüche

$$\frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_k}{(x-a)^k}\ .$$

- Zu jedem Faktor der Form $(x^2+px+q)^l$ gehören die Brüche

$$\frac{B_1x + C_1}{(x^2+px+q)} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + ... + \frac{B_lx + C_l}{(x^2+px+q)^l}\ .$$

Beispiele

- Um $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$ zu berechnen, können wir folgende Partialbruchzerlegung verwenden:

  $$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}\,.$$

  Mittels Koeffizientenvergleich folgt

  $$A = B = \frac{1}{2}\,.$$

  Demnach gilt

  $$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx\right) = \frac{1}{2}(\ln|x+1| - \ln|x-1|) + C$$

  $$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C\,.$$

- Um $\int \frac{1}{x^3-x^2}\,dx$ zu berechnen, können wir folgende Partialbruchzerlegung verwenden:

  $$\frac{1}{x^3-x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}\,.$$

  Mittels Koeffizientenvergleich folgt

  $$A = -1,\ B = -1,\ C = 1\,.$$

  Demnach gilt

  $$\int \frac{1}{x^3-x^2}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx$$

  $$= -\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-1| + C = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \frac{1}{x} + C\,.$$

Beispiele zur Flächenberechnung

- Gesucht ist die Fläche, die der Funktionsgraph von

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}\,, x \mapsto f(x) = c\,, \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}_+^*\,,$$

mit der Abszisse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ einschließt.

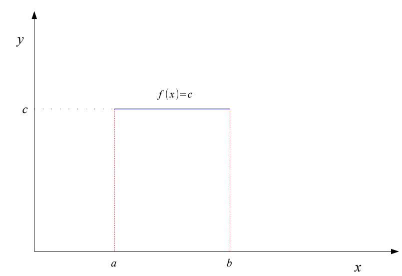


Abbildung 2.3 Flächeninhalt eines Rechtecks

Wir erhalten

$$\int_a^b c\,dx = c \cdot (b-a)\,.$$

- Gesucht ist die Fläche, die der Funktionsgraph von

$$f : [0,a] \to \mathbb{R}\,, x \mapsto f(x) = m\,x\,, \quad \text{mit } m \in \mathbb{R}_+^*\,,$$

mit der Abszisse und der Geraden $x = a$ einschließt.

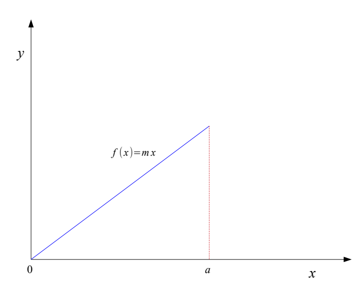


Abbildung 2.4 Flächeninhalt eines Dreiecks

Wir erhalten

$$\int_0^a m\,x\,dx = m\,\frac{x^2}{2}\bigg|_0^a = \frac{h}{a} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}ah\,,$$

mit $h := f(a)$.

- Der Flächeninhalt eines Kreises $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = r^2\}$ lässt sich mit Hilfe des Integrals

  $$\int_a^b \sqrt{r^2 - x^2}\, dx\,, \quad \text{mit } -r < a < b < r\,,$$

  und dieses mittels

  $$\int_a^b \sqrt{1 - x^2}\, dx\,, \quad \text{mit } -1 < a < b < 1\,,$$

  bestimmen.

  Hier berechnen wir die Fläche eines Halbkreises mit Hilfe des Funktionsgraphen von

  $$f : (-1,1) \to \mathbb{R}\,,\; x \mapsto y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}\,.$$

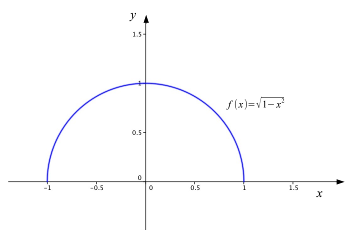


Abbildung 2.5 Flächeninhalt eines Halbkreises

  Nach der Substitution $x = \sin t$, mit $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$, und den Definitionen $u := \arcsin a$ und $v := \arcsin b$ folgt

  $$\int_a^b \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_u^v \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t\, dt = \int_u^v \cos^2 t\, dt\,.$$

  Da

  $$\cos^2 t = \frac{1}{2}(\cos(2t) + 1)$$

  gilt, können wir

  $$\int_a^b \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_u^v (\cos(2t) + 1)\, dt = \frac{1}{4}\sin(2t)\Big|_u^v + \frac{1}{2}t\Big|_u^v$$

schreiben.

Mit

$$\sin(2t) = 2\sin t \cdot \cos t = 2\sin t \cdot \sqrt{1-\sin^2 t}$$

erhalten wir

$$\int\limits_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)\Big|_a^b.$$

Da der Term stetig von den Integrationsgrenzen abhängt, folgt hieraus, dass

$$\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

der Flächeninhalt eines Halbkreises mit Radius 1 ist.

2.3 Uneigentliche Integrale

Hier betrachten wir die Fälle, dass

- das Intervall uneigentlich ist,
- der Integrationsbereich eine Singularität der zu integrierenden Funktion enthält.

Definition: Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Intervall $[a, b]$, mit $a < b < \infty$, Riemann-integrierbar ist. Falls der Grenzwert

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

existiert, heißt das Integral $\int_a^\infty f(x)\, dx$ konvergent und es wird

$$\int_a^\infty f(x)\, dx := \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

gesetzt.

Anmerkung: Entsprechend wird verfahren, wenn statt des uneigentlichen Intervalls $[a, \infty)$ die uneigentlichen Intervalle $(-\infty, b]$ oder $(-\infty, \infty)$ auftreten.

Beispiel

Das Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\, dx\,, \quad \text{mit } s \in \mathbb{R} \text{ und } s > 1\,,$$

konvergiert, da

$$\int_1^b \frac{1}{x^s}\, dx = \frac{1}{1-s} \cdot \frac{1}{x^{s-1}} \bigg|_1^b = \frac{1}{s-1} \left(1 - \frac{1}{b^{s-1}} \right)$$

und daher

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\, dx = \frac{1}{s-1}\,.$$

Definition: Sei $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Teilintervall $[a+\epsilon, b] \subset (a,b]$ Riemann-integrierbar ist. Falls der Grenzwert

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$$

existiert, heißt das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent und es wird

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$$

gesetzt.

Beispiel

Das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx\,, \quad \text{mit } s \in \mathbb{R} \text{ und } s < 1\,,$$

konvergiert, da

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{1}{1-s}\,x^{1-s}\Big|_\epsilon^1 = \frac{1}{1-s}(1-\epsilon^{1-s})$$

und daher

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{1}{1-s}\,.$$

Integral-Vergleichskriterium für Reihen

Satz: Ist $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_+$ eine monoton fallende Funktion, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \int_1^{\infty} f(x)\, dx$$

existiert.

Beispiel

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\,, \ \text{mit}\, s \in \mathbb{R}\,,$$

konvergiert für $s > 1$ und divergiert für $s \leq 1$, wie sich leicht mit Hilfe von

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\, dx$$

zeigen lässt.

Anmerkung: Die Funktion

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}\,, \quad \text{mit } z \in \mathbb{C} \text{ und } Re(z) > 1\,,$$

heißt *Riemannsche Zetafunktion*.

2.4 Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

Mehrfache Integrale auf achsenparallelen Quadern $Q \subset \mathbb{R}^n$ lassen sich als Verallgemeinerung der Integrale für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definieren.

Sei

$$Q = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n \,,$$

wobei $I_k := [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}$, und

$$f : Q \to \mathbb{R} \,,\; x \mapsto f(x)$$

eine stetige Funktion.

Anmerkung: Statt $x \in \mathbb{R}^n$ können wir auch $(x_1, ..., x_n)$ mit $x_i \in \mathbb{R}$ schreiben.

Ist $(x_2, ..., x_n) \in I_2 \times ... \times I_n$ fest, so kann die Funktion f hinsichtlich x_1 über das Intervall I_1 integriert werden. Setzen wir

$$F_1(x_2, ..., x_n) := \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1 \,,$$

so ist

$$F_1 : I_2 \times ... \times I_n \to \mathbb{R}$$

stetig, wie sich zeigen lässt. Ist nun $(x_3, ..., x_n) \in I_3 \times ... \times I_n$ fest, so kann die Funktion F_1 hinsichtlich x_2 über das Intervall I_2 integriert werden. Setzen wir

$$F_2(x_3, ..., x_n) := \int_{a_2}^{b_2} F_1(x_2, ..., x_n)\, dx_2 = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1 \right) dx_2 \,,$$

so ist

$$F_2 : I_3 \times ... \times I_n \to \mathbb{R}$$

stetig. Nach n-maliger Wiederholung dieses Verfahrens ergibt sich

$$\int_Q f(x_1, ..., x_n)\, dx_1 ....dx_n = \int_{a_n}^{b_n} ... \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1 \right) dx_2 \right) ...dx_n \,.$$

Statt $\int_Q f(x_1, ..., x_n)\, dx_1 ....dx_n$ schreiben wir auch kürzer $\int_Q f(x) d^n x$.

Linearität und Monotonie des Integrals

Seien $f, g : Q \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g$ und λf integrierbar und es gilt:

(i) $\displaystyle\int\limits_Q (f(x) + g(x)) d^n x = \int\limits_Q f(x)\, d^n x + \int\limits_Q g(x)\, d^n x,$

(ii) $\displaystyle\int\limits_Q \lambda \cdot f(x) d^n x = \lambda \cdot \int\limits_Q f(x) d^n x,$

(iii) Ist $f \leq g$, so gilt $\displaystyle\int\limits_Q f(x) d^n x \leq \int\limits_Q g(x)\, d^n x$.

Integration über Teilmengen

Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Eine Funktion

$$f : M \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

heißt integrierbar über M, falls die Funktion

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\,, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für} \quad x \in M \\ 0 & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash M \end{cases}$$

über $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist. Dabei werden uneigentliche Integrale analog zu dem Vorgehen im $\mathbb{R}^1$ definiert.

Ist f über M integrierbar, so wird

$$\int\limits_M f(x)\, dx := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)\, dx\,.$$

gesetzt.

Integrierbare Mengen

Definitionen: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Die *charakteristische Funktion* von M ist definiert durch

$$\chi_{_M}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in M \\ 0 & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash M\,. \end{cases}$$

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt integrierbar, falls $\chi_{_M}$ integrierbar ist.

Sind $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ zwei integrierbare Teilmengen mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, so gilt

$$\int\limits_{M_1 \cup M_2} f(x)\, d^n x = \int\limits_{M_1} f(x)\, d^n x + \int\limits_{M_2} f(x)\, d^n x\,.$$

Anmerkung: Diese Eigenschaft ist beispielsweise auch gültig, wenn $M_1 \cap M_2 = A$ mit $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

Definition: Das Volumen einer integrierbaren Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$Vol(M) := \int\limits_{M} d^n x := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_{_M}(x)\, d^n x\,.$$

2.4.1 Integration im $\mathbb{R}^2$

Doppelintegrale auf Rechtecken $Q \subset \mathbb{R}^2$ lassen sich als Verallgemeinerung der Integrale für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definieren.

Sei

$$Q = I_1 \times I_2 \,,$$

wobei $I_k := [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}$, und

$$f : Q \to \mathbb{R}\,,\ (x, y) \mapsto f(x, y)$$

eine stetige Funktion.

Ist $y \in I_2$ fest, so kann die Funktion f hinsichtlich x über das Intervall I_1 integriert werden. Setzen wir

$$F_1(y) := \int\limits_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx \,,$$

so ist

$$F_1 : I_2 \to \mathbb{R}$$

stetig, wie sich zeigen lässt.

Linearität und Monotonie des Integrals

Seien $f, g : Q \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g$ und λf integrierbar und es gilt:

(i) $\displaystyle\int\limits_Q (f(x, y) + g(x, y))\, dx\, dy = \int\limits_Q f(x, y)\, dx\, dy + \int\limits_Q g(x, y)\, dx\, dy,$

(ii) $\displaystyle\int\limits_Q \lambda \cdot f(x, y)\, dx\, dy = \lambda \cdot \int\limits_Q f(x, y)\, dx\, dy,$

(iii) Ist $f \leq g$, so gilt $\displaystyle\int\limits_Q f(x, y)\, dx\, dy \leq \int\limits_Q g(x, y)\, dx\, dy$.

Integration über rechteckige Bereiche

Der Integrationsbereich ist hierbei ein Rechteck

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_0 \le x \le x_1, y_0 \le y \le y_1\}\,.$$

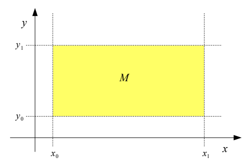


Abbildung 2.6 Rechteck als Integrationsbereich

Ist $f : M \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt

$$\iint\limits_M f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\int\limits_{y_0}^{y_1} f(x, y)\,dy \right) dx = \int\limits_{y_0}^{y_1} \left(\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x, y)\,dx \right) dy\,.$$

Demnach kann die Integrationsreihenfolge vertauscht werden.

Integration über allgemeinere Bereiche im $\mathbb{R}^2$

Der Integrationsbereich $M \subset \mathbb{R}^2$ kann auch allgemeiner gewählt werden, wie folgendes Beispiel zeigt:

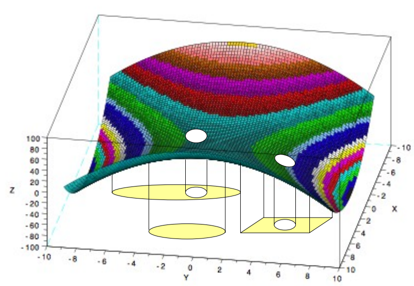


Abbildung 2.7 Ein Integrationsbereich

Ist der Integrationsbereich die Menge

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_0 \le x \le x_1, y_0(x) \le y \le y_1(x)\}$$
$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_0(y) \le x \le x_1(y), y_0 \le y \le y_1\}\,,$$

so erhalten wir für eine integrierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$

$$\iint\limits_M f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\int\limits_{y_0(x)}^{y_1(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int\limits_{y_0}^{y_1} \left(\int\limits_{x_0(y)}^{x_1(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Beispiele

- Sei $f : M \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x,y) = x\sin(\pi y)$ und $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$.

  Dann gilt

  $$\iint\limits_M x\sin(\pi y)\,dx\,dy = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^1 x\sin(\pi y)\,dy \right) dx\,.$$

  Außerdem erhalten wir

  $$\int\limits_0^1 x\sin(\pi y)\,dy = -\frac{x}{\pi}\,\cos(\pi y)\Big|_0^1 = \frac{2x}{\pi}$$

  und

  $$\int\limits_0^2 \frac{2x}{\pi}\,dx = \frac{x^2}{\pi}\Big|_0^2 = \frac{4}{\pi}\,.$$

  Kehren wir die Integrationsreihenfolge um, so ergibt sich

  $$\int\limits_M x\sin(\pi y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^2 x\sin(\pi y)\,dx \right) dy\,.$$

  Ferner gilt

  $$\int\limits_0^2 x\sin(\pi y)\,dx = \sin(\pi y)\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2\sin(\pi y)$$

  und

  $$\int\limits_0^1 2\sin(\pi y)\,dy = -\frac{2}{\pi}\cos(\pi y)\Big|_0^1 = \frac{4}{\pi}\,.$$

- Sei $f : M \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x,y) = xy^2$ und M das von den Geraden $x = 0$, $y = 0$ und $y = -\frac{1}{2}\,x + 1$ berandete Gebiet im ersten Quadranten.

  Es gilt

$$\iint\limits_M xy^2 \,dx\,dy = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{-\frac{1}{2}x+1} xy^2 \,dy \right) dx\,.$$

  Außerdem erhalten wir

$$\int\limits_0^{-\frac{1}{2}x+1} xy^2 \,dy = x\,\frac{y^3}{3}\Big|_0^{-\frac{1}{2}x+1} = \frac{x}{3}\left(-\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right)$$

  und

$$\int\limits_0^2 \left(-\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x\right) dx = \left(-\frac{1}{24\cdot 5}x^5 + \frac{1}{4\cdot 4}x^4 - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{3\cdot 2}x^2\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{15}\,.$$

  Bei umgekehrter Integrationsreihenfolge berechnen wir

$$\iint\limits_M xy^2 \,dx\,dy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{2-2y} xy^2 \,dx \right) dy\,.$$

  Es gilt

$$\int\limits_0^{2-2y} xy^2 \,dx = y^2\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2-2y} = 2y^2\left(1 - 2y + y^2\right)$$

  und

$$2\int\limits_0^1 \left(y^2 - 2y^3 + y^4\right)\,dy = 2\left(\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{5}y^5\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{15}\,.$$

Transformation auf Polarkoordinaten

Wir erhalten die *(ebenen) Polarkoordinaten* $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ durch die kartesischen Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ mittels

$$(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)\,.$$

Ist M in folgender Form

$$M := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi) \,|\, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi), \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}$$

gegeben, so können wir die Integration über kartesische Koordinaten vermeiden, indem wir folgende Identität

$$\iint\limits_M f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r, \varphi)\, r\, dr \right) d\varphi$$

nutzen.

Beispiel

Sei M ein Viertelkreis mit Radius $r = 2$ und

$$f : M \to \mathbb{R}\,, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = xy\,.$$

Dann erhalten wir

$$\iint\limits_M xy\, dx\, dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^2 r^2 \sin \varphi \cos \varphi\, r\, dr \right) d\varphi\,.$$

Ferner gilt

$$\int\limits_0^2 r^2 \sin \varphi \cos \varphi\, r\, dr = \sin \varphi \cos \varphi \int\limits_0^2 r^3\, dr = \sin \varphi \cos \varphi \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^2$$

$$= 4 \sin \varphi \cos \varphi = 2 \sin(2\varphi)$$

und

$$2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\varphi)\, d\varphi = - \cos(2\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\,.$$

2.4.2 Integration im $\mathbb{R}^3$

Transformation auf Zylinderkoordinaten

Ist das Problem axialsymmetrisch, so kann es vorteilhaft sein, Zylinderkoordinaten zu benutzen.

Dabei werden in jeder Ebene senkrecht zur z-Achse (ebene) Polarkoordinaten, ρ und φ verwendet. Als dritte Koordinate wird zusätzlich die kartesische Koordinate z übernommen.

Die Zuordnung der Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) eines Punktes im $\mathbb{R}^3$ zu dessen kartesischen Koordinaten geschieht mittels

$$x = \rho \cos\varphi\,,$$

$$y = \rho \sin\varphi\,,$$

$$z = z\,,$$

wobei beispielsweise $\varphi \in [0, 2\pi)$ gewählt wird. Im Folgenden schreiben wir häufig r statt ρ.

Ist M in folgender Form

$$M := \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}\,|$$

$$r_1(z) \leq r \leq r_2(z), \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, z_1 \leq z \leq z_2\}$$

gegeben, so können wir für die Integration die Identität

$$\iiint\limits_M f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{z_1}^{z_2} \left(\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int\limits_{r_1(z)}^{r_2(z)} f(r,\varphi,z)\,r\,dr \right) d\varphi \right) dz$$

nutzen. Allgemein kann das Volumenelement $dV = dx\,dy\,dz$, für Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z), umgeschrieben werden zu

$$dV = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz\,.$$

Beispiel

Zur Berechnung des Volumens eines Kegels betrachten wir

$$M := \{(r,\varphi,z) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi) \times \mathbb{R} \mid$$
$$0 \le r \le r_2(z), 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le z \le H\} .$$

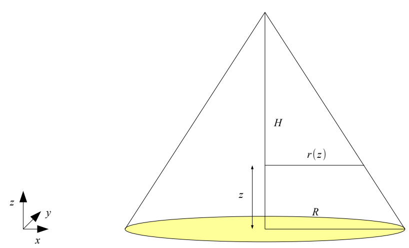


Abbildung 2.8 Kegel

Dabei gilt

$$\frac{r(z)}{R} = \frac{H-z}{H}\,,\ 0 \le z \le H\,.$$

Das Volumen des Kegels lässt sich nun mit Hilfe des Integrals

$$V = \iiint\limits_M r\,dr\,d\varphi\,dz$$

berechnen.

Es gilt

$$\int\limits_0^{r(z)} r\,dr = \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\frac{R}{H}(H-z)} = \frac{1}{2}(\frac{R}{H})^2(H-z)^2\,.$$

Wir erhalten demnach

$$V = 2\pi\frac{1}{2}(\frac{R}{H})^2\int\limits_0^H (H-z)^2\,dz = -\pi(\frac{R}{H})^2\int\limits_H^0 \tilde{z}^2\,d\tilde{z}\,.$$

und schließlich

$$V = \pi(\frac{R}{H})^2 \cdot \left.\frac{\tilde{z}^3}{3}\right|_0^H = \frac{1}{3}\,\pi R^2 H\,.$$

Transformation auf Kugelkoordinaten

Ein Punkt im $\mathbb{R}^3$ lässt sich auch mittels Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) bestimmen. Die Zuordnung zu dessen kartesischen Koordinaten erfolgt dabei mittels

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi\,,$$

$$y = r \sin\vartheta \sin\varphi\,,$$

$$z = r \cos\vartheta\,,$$

wobei beispielsweise $\vartheta \in [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ gewählt wird.

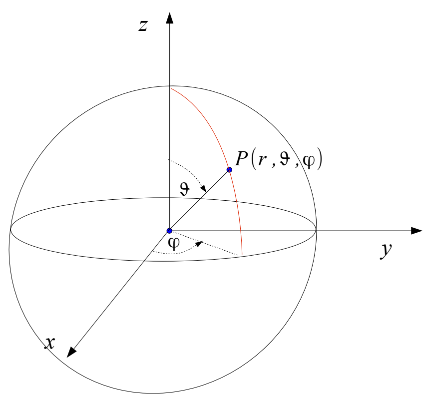


Abbildung 2.9 Kugelkoordinaten

Allgemein kann das Volumenelement $dV = dx\,dy\,dz$, für Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ), umgeschrieben werden zu

$$dV = r^2 \sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi\,.$$

Bestimmung des Schwerpunktes (Massenmittelpunktes) und des Trägheitstensors bei kontinuierlicher Masseverteilung im $\mathbb{R}^3$

(i) Der *Schwerpunkt* $\vec{r}_s$ ist, bei kontinuierlicher Massenverteilung, folgendermaßen definiert:

$$\vec{r}_s := \frac{1}{M} \int\limits_{\Omega} \rho \cdot \vec{r} \, d^3x \, .$$

(ii) Die Komponenten des *Trägheitstensors* (I_{ik}) sind, bei kontinuierlicher Massenverteilung, folgendermaßen definiert:

$$I_{ik} := \int\limits_{\Omega} \rho \cdot (|x|^2 \delta_{ik} - x_i x_k) \, d^3x \, , \quad i, k = 1, 2, 3 \, .$$

Dabei liegt der Nullpunkt des Koordinatensystems im Schwerpunkt, so dass $x \in \mathbb{R}^3$ der Abstand vom Schwerpunkt ist. Statt $\int\limits_{\Omega} f(x, y, z) \rho \, d^3x$ wird oft auch einfach

$$\int f(x, y, z) \, dm$$

geschrieben. Die *Trägheitsmomente*

$$I_{11} = \int\limits_{\Omega} \rho \cdot (x_2^2 + x_3^2) \, d^3x \, ,$$

$$I_{22} = \int\limits_{\Omega} \rho \cdot (x_1^2 + x_3^2) \, d^3x \, ,$$

$$I_{33} = \int\limits_{\Omega} \rho \cdot (x_1^2 + x_2^2) \, d^3x$$

sind demnach die Hauptdiagonalelemente des Trägheitstensors. Die *Deviationsmomente* sind die Komponenten

$$-I_{12} = \int\limits_{\Omega} \rho \cdot x_1 x_2 \, d^3x \, ,$$

$$-I_{23} = \int\limits_{\Omega} \rho \cdot x_2 x_3 \, d^3x \, ,$$

$$-I_{31} = \int\limits_{\Omega} \rho \cdot x_3 x_1 \, d^3x \, .$$

Dabei bezeichnet $\rho = \rho(x, y, z)$ die Massendichte und die Integrationerstreckt sich jeweils über das beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ der vorgegebenen Masseverteilung. Mit M wird die Gesamtmasse

$$M = \int\limits_{\Omega} \rho \, d^3x$$

bezeichnet.

Beispiele

(i) *Schwerpunkt eines Kreisbogens aus dünnem homogenen Draht*

Sei $\alpha > 0$ der Öffnungswinkel, R der Radius des Kreisbogens und μ die konstante Masse des Drahtes pro Längeneinheit. Wir wählen die x-Achse als Symmetrieachse. Es gilt

$$y_s = 0$$

und

$$x_s = \frac{\int x \, dm}{\int dm} = \frac{\int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} R\cos\varphi \cdot \mu R \, d\varphi}{\int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \mu R \, d\varphi} = (\mu R\alpha)^{-1} \cdot \mu R^2 \int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \cos\varphi \, d\varphi = \frac{2R}{\alpha} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \, .$$

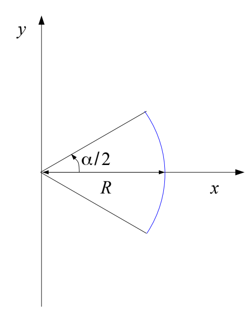


Abbildung 2.10 Drahtbogen

(ii) *Trägheitsmomente eines rechtwinkligen homogenen Parallelepipeds*

Die Kantenlängen seien a, b, c. Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass x, y, z die Symmetrieachsen sind und a die Kantenlänge in Richtung x, b die Kantenlänge in Richtung y und c die Kantenlänge in Richtung z ist. Demnach liegt der Schwerpunkt im Ursprung.

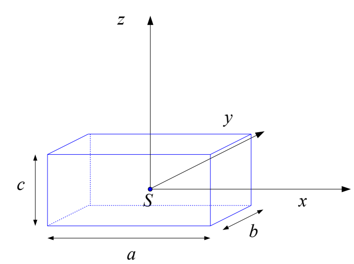


Abbildung 2.11 Quader

Für das Trägheitsmoment hinsichtlich der gewählten z-Achse gilt

$$I_{33} = I_{zz} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \rho \cdot (x^2 + y^2)\, dxdydz = \rho\, c \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (x^2 + y^2)\, dxdy$$

$$= \rho\, c \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx = \rho\, c \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2 b + \frac{b^3}{12})\, dx$$

$$= \rho\, c \cdot \left[\frac{x^3}{3} b + \frac{b^3}{12} x \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \rho\, c \cdot (\frac{a^3}{12} b + \frac{b^3}{12} a)$$

$$= \rho\, abc \cdot (\frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{12}) = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)\,.$$

Entsprechend ergibt sich für die gewählten x- bzw. y-Achse

$$I_{11} = I_{xx} = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2)$$

und

$$I_{22} = I_{yy} = \frac{1}{12} m (a^2 + c^2)\,.$$

Ist z eine Symmetrieachse, so kann es sinnvoll sein, das Volumenelement mittels Zylinderkoordinaten zu formulieren, d. h.

$$dV = r dr \, d\varphi \, dz$$

zu schreiben. Damit lässt sich das Volumen eines Rotationskörpers bestimmen. Es lassen sich aber auch beispielsweise die Gleichungen für die Schwerpunktskoordinaten oder die Trägheitsmomente bei Rotationssymmetrie vereinfachen.

Beispiel

Gegeben ist ein wie in folgender Abbildung dargestellter homogener Kreiszylinder:

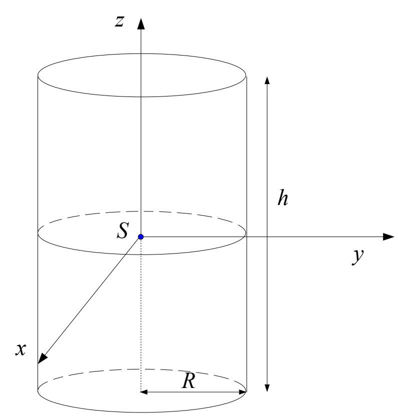


Abbildung 2.12 Kreiszylinder

Dabei bezeichnet R den Radius des Zylinders, h seine Höhe und S seinen Schwerpunkt.

Mit der Gesamtmasse

$$m = \rho \cdot R^2 \pi h$$

erhalten wir für die Trägheitsmomente des Zylinders zur z-Achse bzw. x-Achse:

$$I_{zz} = \int_0^R \rho r^2 \cdot 2\pi r h \, dr = \rho \cdot 2\pi h \int_0^R r^3 \, dr = \frac{1}{2} \rho \cdot \pi h R^4 = \frac{1}{2} m R^2$$

und

$$I_{xx} = \int_0^R \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \rho(r^2 \sin^2\varphi + z^2)\, r\, dr\, dz\, d\varphi$$

$$= \rho \left(h \int_0^R r^3\, dr \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi + 2\pi \int_0^R r\, dr \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2\, dz \right)$$

$$= \rho \left(h \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \pi + 2\pi \cdot \frac{R^2}{2} \cdot \frac{h^3}{12} \right) = \rho \cdot R^2 \pi h (\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}h^2) = m(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}h^2)\,.$$

Rotationskörper

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ stetig. Dann bezeichnen wir beispielsweise die Menge

$$K := \{(x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$$

als Rotationskörper.

Das Volumen eines Rotationskörpers lässt sich mit Hilfe der Formel

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$

berechnen.

Diese Formel ist auch das Ergebnis einer Approximation des Volumens mittels Kreiszsylindern mit den Volumina

$$V_k = \pi f(x_k)^2 \triangle x \,.$$

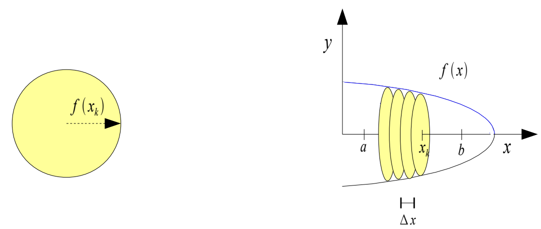


Abbildung 2.13 Volumen eines Rotationskörpers

Beispiele

- Hinsichtlich $f : [0, \dfrac{3}{2}] \to \mathbb{R}_+ \,, \quad x \mapsto f(x) = x^2$ soll das Volumen des Rotationskörpers

  $$K := \{(x, y, z) \in [0, \frac{3}{2}] \times \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$$

  bestimmt werden.

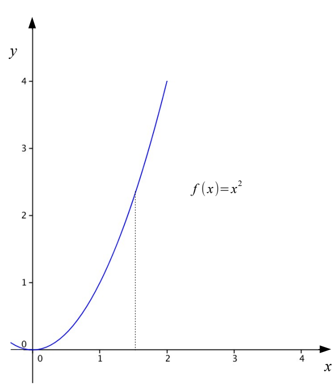


Abbildung 2.14 Der Graph von $f(x) = x^2$

Für das *Volumen des Rotationskörpers* erhalten wir

$$V = \pi \int_0^{\frac{3}{2}} f(x)^2 \, dx = \pi \, \frac{x^5}{5} \Big|_0^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 .$$

- Um das Volumen eine Kugel mit Radius r zu bestimmen, betrachten wir wieder den Funktionsgraphen von

$$f : (-r, r) \to \mathbb{R}\,, \; x \mapsto f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}\,.$$

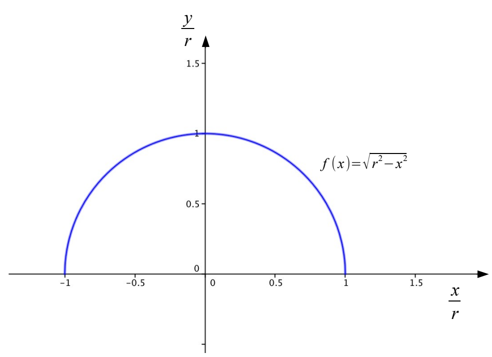


Abbildung 2.15 Halbkreis

Für das Volumen der Kugel erhalten wir

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \, dx = \pi \, (r^2 x - \frac{1}{3} \, x^3) \Big|_{-r}^{r} = \frac{4\pi}{3} \, r^3 \,.$$

Rotationsflächen

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}_+^*$ stetig differenzierbar. Dann sei

$$M := \{(x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 + z^2 = f(x)^2\}\,.$$

Für den *Flächeninhalt* S *der Mantelfläche* des zugehörigen *Rotationskörpers* gilt

$$S = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx\,.$$

Beispiel

Sei

$$f : [0, \frac{3}{2}] \to \mathbb{R}_+\,, \quad x \mapsto f(x) = x^2\,.$$

Dann gilt

$$S = 2\pi \int\limits_0^{\frac{3}{2}} x^2\sqrt{1 + 4x^2}\,dx = \frac{1}{32}\pi(57\sqrt{10} - \sinh^{-1}(3)) = 17{,}517\,.$$

2.5 Kurvenintegrale

2.5.1 Länge einer Kurve

Ist $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann nennen wir

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

die *euklidische Norm* von x.

Ist $n = 2$, so erhalten wir als *euklidische Norm* eines Vektors $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ demnach

$$\sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine Kurve. Das Intervall $[a, b]$ wird folgendermaßen unterteilt:

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b\,.$$

Verbinden wir die Punkte $\varphi(t_{i-1})$ mit $\varphi(t_i)$ für $i = 1, ..., k$ durch Geradenstücke, so erhalten wir einen Polygonzug.

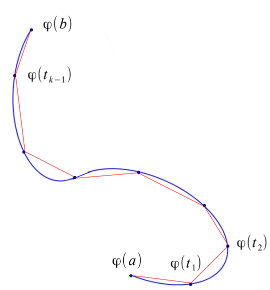


Abbildung 2.16 Polygonzug

Die Länge des Polygonzugs ist gleich

$$p_\varphi(t_0, ..., t_k) := \sum_{i=1}^{k} \|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\|$$

und für $n = 2$ gleich

$$\sum_{i=1}^{k} \sqrt{(\varphi_x(t_i) - \varphi_x(t_{i-1}))^2 + (\varphi_y(t_i) - \varphi_y(t_{i-1}))^2}\,.$$

Eine Kurve $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *rektifizierbar* mit der Länge L, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$ eine Feinheit $\leq \delta$ der Unterteilung

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$$

existiert, so dass

$$|p_\varphi(t_0, ..., t_k) - L| \leq \epsilon$$

gilt.

Für eine *stetig differenzierbare* Kurve $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ existiert eine Folge beliebig feiner Unterteilungen, so dass diese rektifizierbar ist und somit die zugehörige Länge des Polygonzugs gegen die Länge L der Kurve konvergiert. Weiterhin gilt für diese Kurve

$$L = \int\limits_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt \, .$$

Ist $n = 2$, so gilt für die Länge einer stetig differenzierbaren Kurve

$$L = \int\limits_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt = \int\limits_a^b \sqrt{({\varphi_x}'(t))^2 + ({\varphi_y}'(t))^2} \, dt \, .$$

Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann kann der Graph dieser Funktion als Kurve φ im $\mathbb{R}^2$ aufgefasst werden mit

$$\varphi : I \to \mathbb{R}^2, \; t \mapsto (t, f(t)) \, .$$

In diesem Fall erhalten wir

$$({\varphi_x}'(t))^2 + ({\varphi_y}'(t))^2 = 1 + (f'(t))^2$$

und daher, mit $I = [a, b]$,

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} \, dt \, .$$

Anmerkung: Statt t können wir hier selbstverständlich auch x schreiben.

Beispiele

a) Um die Länge eines Kreises mit Radius r zu bestimmen, betrachten wir den Funktionsgraphen von

$$f : (-r, r) \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}\,.$$

Es gilt

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,.$$

Demnach beträgt die Länge des Halbkreises

$$L = \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = r \int\limits_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx$$

$$= r \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = r\ \arcsin x \Big|_{-1}^{1} = r\pi\,.$$

Wir können einen Kreisbogen auch mit Hilfe von Polarkoordinaten ausdrücken.

Seien $r, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Durch

$$\varphi : [0, \alpha] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \varphi(t) = r \cdot (\cos t, \sin t)$$

wird ein Kreisbogen beschrieben. Es gilt

$$\varphi'(t) = r \cdot (-\sin t, \cos t)$$

und daher

$$\sqrt{({\varphi_x}'(t))^2 + ({\varphi_y}'(t))^2} = r\,\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = r\,.$$

Somit erhalten wir für die Bogenlänge

$$L = r \int\limits_{0}^{\alpha} dt = r\alpha\,.$$

Der Umfang eines Kreises ist $2\pi r$.

b) Sei $r \in \mathbb{R}_+^*$. Dann wird eine *Zykloide* durch

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \varphi(t) = r \cdot (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

beschrieben.

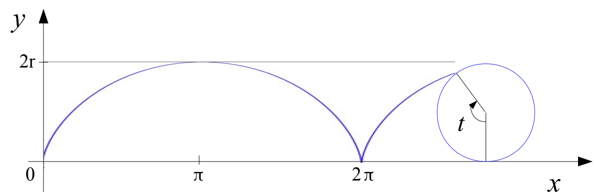


Abbildung 2.17 Zykloide

Ist $r = 1$, dann gilt

$$\varphi'(t) = (1 - \cos t, \sin t)\,,$$

demnach

$$\begin{aligned}\|\varphi'(t)\|^2 &= (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t \\ &= 2(1 - \cos t) = 4\sin^2 \frac{t}{2}\end{aligned}$$

und folglich

$$L_{[0,2\pi]} = \int_0^{2\pi} 2|\sin \frac{t}{2}|\, dt = 4 \int_0^{\pi} \sin u\, du = 8\,.$$

c) Durch

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \varphi(t) = t \cdot (\cos t, \sin t)$$

ist eine *Archimedische Spirale* gegeben.

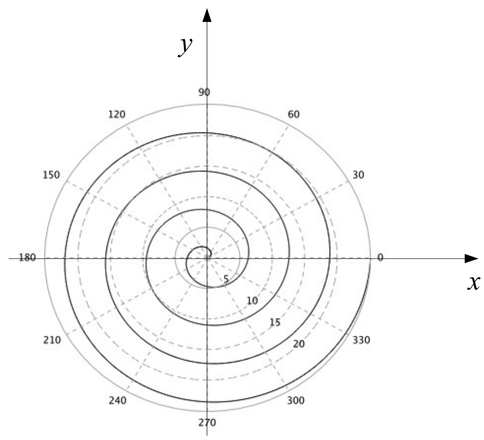


Abbildung 2.18 Archimedische Spirale $r = t$, mit $t \in [0, 8\pi]$

Es gilt

$$L_{[0,\frac{\pi}{2}]} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+t^2}\, dt$$

$$= \left(\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln(t + \sqrt{1+t^2})\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \approx 2{,}079\,.$$

d) Durch

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2,$$

mit

$$\varphi(0) = 0 \ \text{ und } \ \varphi(t) = (t, t^2 \cos\frac{\pi}{t^2}) \text{ für } 0 < t \leq 1$$

ist eine nicht rektifizierbare Kurve gegeben.

2.5.2 Integration von Funktionen und Vektorfeldern über Kurven

Sei

$$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

eine stückweise stetig differenzierbare Kurve und

$$f : \varphi([a,b]) \to \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann wird das Kurvenintegral von f über φ durch

$$\int_{\varphi} f\,ds := \int_a^b f(\varphi(t))\|\varphi'(t)\|\,dt$$

erklärt.

Beispiel

Der Schwerpunkt der Schraubenlinie

$$(r\cos t, r\sin t, ht)\,, \quad r,h > 0\,,\ t \in [0,2\pi]\,.$$

liegt in $(0,0,z_s)$ mit

$$z_s = L^{-1}\int_0^{2\pi} ht\cdot\sqrt{r^2+h^2}\,dt = \frac{h}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\,dt = \frac{h}{2\pi}\frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = \pi h\,,$$

da für die Bogenlänge L

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+h^2}\,dt = \sqrt{r^2+h^2}\int_0^{2\pi} dt = 2\pi\sqrt{r^2+h^2}$$

gilt.

Für $f = 1$ erhalten wir, mit

$$\int_{\varphi} ds = \int_a^b \|\varphi'(t)\|\,dt\,,$$

wieder unsere Bogenlänge.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen,

$$f_i : U \to \mathbb{R}\,,$$

mit $i = 1, ..., n$, stetige Funktionen. Mit dem Vektorfeld

$$\vec{f} = f := (f_1, ..., f_n) : U \to \mathbb{R}^n$$

und

$$d\vec{s} := (dx_1, ..., dx_n)$$

schreiben wir

$$\vec{f} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^{n} f_i \, dx_i\,.$$

Demnach bezeichnen wir hier das Vektorfeld sowohl als f als auch als $\vec{f}$.

Das Kurvenintegral des Vektorfeldes f über φ wird erklärt durch

$$\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, dx_i := \int\limits_a^b \langle f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle \, dt\,.$$

Dabei ist die Kurve φ wie oben gegeben, und $\langle .,. \rangle$ bezeichnet das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Etwas kürzer können wir auch

$$\int\limits_{\varphi} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int\limits_a^b \langle f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle \, dt$$

schreiben.

Anmerkung: Ein Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ wird häufig auch einfach als Multiplikation zweier Vektoren oder mittels $(.,.)$ geschrieben.

Nun setzen wir

$$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

als eine stetig differenzierbare, injektive und reguläre Kurve voraus. Es ist

$$\tau(x) := \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}$$

der Tangenten-Einheitsvektor der Kurve im Kurvenpunkt $x = \varphi(t) \in \mathbb{R}^n$. Wie sich nun zeigt, gilt

$$\int\limits_{\varphi} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int\limits_{\varphi} \langle f, \tau \rangle \, ds\,.$$

Beispiel

Ein Massepunkt wird im Kraftfeld

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x)$$

von $P_1(1,0)$ nach $P_2(0,1)$ entlang der Kurve

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t)\,, \quad 0 \le t \le \frac{1}{2}\pi\,,$$

bewegt. Dann gilt

$$\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t)\,, \quad f(\varphi(t)) = (-\sin t, \cos t)\,,$$

damit

$$\langle f(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle = \sin^2 t + \cos^2 t = 1\,,$$

und schließlich

$$\int_{P_1}^{P_2} \langle f(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{1}{2}\pi\,.$$

2.6 Gradientenfelder und Potentiale

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ein Vektorfeld

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

heißt *Gradientenfeld*, wenn eine stetig differenzierbare Funktion

$$U : \Omega \to \mathbb{R}$$

existiert, so dass

$$f = \text{grad}\, U\,.$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, d. h. eine offene wegweise zusammenhängende Punktmenge, und

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

ein stetiges Vektorfeld. Ferner sei

$$\varphi : [a, b] \to \Omega$$

eine stückweise stetig differenzierbare Kurve mit Anfangspunkt $\xi = \varphi(a)$ und Endpunkt $\eta = \varphi(b)$. Das Wegintegral (auch Kurvenintegral genannt)

$$\int_{\xi}^{\eta} \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, dx_i := \int_{a}^{b} \langle f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle\, dt$$

ist genau dann wegunabhängig, d. h. unabhängig von φ, wenn f ein Gradientenfeld ist.
Dann gilt

$$\int_{\xi}^{\eta} \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, dx_i = U(\eta) - U(\xi)\,.$$

Beispiel

Sei

$$f(x, y, z) = (yz, zx, xy)\,.$$

Dann sind

$$U(x, y, z) = xyz + c$$

die Potentialfunktionen. Das lässt sich durch Bildung des Gradienten bestätigen. Wegen der (im Nachhinein bestätigten) Wegunabhängigkeit des Integrals können wir folgendermaßen vorgehen:

$$\begin{aligned}
\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x_1,y_1,z_1)} (\nabla U, \tau)\, ds &= \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x_1,y_0,z_0)} \partial_x U(x,y,z)\, dx \\
&\quad + \int_{(x_1,y_0,z_0)}^{(x_1,y_1,z_0)} \partial_y U(x,y,z)\, dy + \int_{(x_1,y_1,z_0)}^{(x_1,y_1,z_1)} \partial_z U(x,y,z)\, dz \\
&= y_0 z_0 (x_1 - x_0) + z_0 x_1 (y_1 - y_0) + x_1 y_1 (z_1 - z_0) \\
&= x_1 y_1 z_1 - y_0 z_0 x_0 \,.
\end{aligned}$$

Ein stetiges Kraftfeld $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ heißt *konservativ*, wenn diese Kurvenintegrale zu beliebigen Anfangs- und Endpunkten $\xi, \eta \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ nur von ξ und η abhängen.

Existiert zu $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine stetig differenzierbare Funktion $U : \Omega \to \mathbb{R}$, so dass

$$f = -\text{grad}\, U = -(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z})$$

gilt, dann heißt U *Potential* von f.

Ein stetiges Kraftfeld $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ist genau dann konservativ, wenn es ein Potential besitzt.

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein sternförmiges Gebiet, so besitzt ein stetig differenzierbares Kraftfeld $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ *genau dann* ein Potential, wenn

$$\text{rot}\, f := (\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}) = 0$$

ist. Eine solche Bedingung wird *Integrabilitätsbedingung* genannt. Diese Aussage bezeichnet man als *Poincarésches Lemma* (im $\mathbb{R}^3$).

Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig* (bzgl. eines Punktes $p \in \Omega$), wenn für jeden Punkt $x \in \Omega$

$$\{(1-t)p + tx \,|\, 0 \le t \le 1\} \subset \Omega \,.$$

Im $\mathbb{R}^2$ bedeutet das Verschwinden der Rotation, dass

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$$

gilt.

Beispiel

Wir betrachten den Spannungsabfall

$$U_{12} = -\int_{P_1}^{P_2} (E, \tau) ds$$

zwischen $P_1(1,1,1)$ und $P_2(3,4,5)$ im elektrischen Feld

$$E(x,y,z) = (2xy + z^3, x^2 + 3z, 3z^2x + 3y)\,.$$

Da

$$\begin{aligned} \text{rot } E &= (\partial_y E_z - \partial_z E_y, \partial_z E_x - \partial_x E_z, \partial_x E_y - \partial_y E_x) \\ &= (3-3, 3z^2 - 3z^2, 2x - 2x) = (0,0,0)\,, \end{aligned}$$

existiert eine Potentialfunktion. Mit

$$-U(x,y,z) = x^2y + z^3x + 3zy$$

gilt

$$E = -\text{grad } U$$

und

$$\begin{aligned} \int_{P_1}^{P_2} (E, \tau) ds = U(3,4,5) - U(1,1,1) &= 3^2 \cdot 4 + 5^3 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \cdot 4 - 5 \\ &= 36 + 375 + 60 - 5 = 466\,. \end{aligned}$$

2.7 Übungsaufgaben: Integralrechnung

Aufgabe 1
Zerlegen Sie das Intervall $[2, 4]$ in 10 gleich große Teile. Berechnen Sie für $f(x) = x^2$

a) die Untersumme $\underline{S}$,

b) die Obersumme $\overline{S}$,

c) die Summe

$$\sum_{k=1}^{10} (\frac{x_{k-1} + x_k}{2})^2 \triangle x_k \,.$$

Aufgabe 2
Berechnen Sie

$$\int\limits_a^b x\,dx$$

als Grenzwert einer Summe.

Aufgabe 3
Berechnen Sie folgende Integrale mittels Substitution:

a) $\displaystyle\int x^2 \sin(x^3)\,dx\,,$ b) $\displaystyle\int \frac{6x}{\sqrt{3x^2+2}}\,dx\,,$ c) $\displaystyle\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx\,,$
d) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx\,,$ e) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx\,.$

Aufgabe 4
Berechnen Sie folgende Integrale mittels partieller Integration:

a) $\displaystyle\int x\cos x\,dx\,,$ b) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln x\,dx\,,$ c) $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx\,,$

d) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx\,,$ e) $\displaystyle\int (\ln x)^2\,dx\,.$

Aufgabe 5
Berechnen Sie folgende Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

a) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-2x}\,dx\,,$ b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-2x+1}\,dx\,,$
c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx\,,$ d) $\displaystyle\int \frac{2x^3-3x^2+x-1}{x^4+x^2}\,dx\,.$

Aufgabe 6
Bestimmen Sie die Stammfunktionen zu

a) $\displaystyle\frac{6x^2}{(1-4x^3)^3}\,,$ b) $\displaystyle\frac{4x}{x^2+1}\,,$ c) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,,$
d) $\sqrt{a^2-x^2}\,,$ e) $x\sin(x^2)\,,$ f) $x^2\exp(x^3-2)\,,$
g) $\cos x\cdot\sin^2 x\,,$ h) $\displaystyle\frac{\sin(\ln x)}{x}\,,$ i) $\displaystyle\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\,,$
k) $\displaystyle\frac{\sin x}{\cos^3 x}\,,$ l) $\displaystyle\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$

und berechnen Sie die Integrale

m) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(\frac{\pi}{2}-x^2)\,dx\,,$ n) $\displaystyle\int_0^t x^3e^{-x^2}\,dx\,,$ o) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\cosh x}{1+\sinh x}\,dx\,,$
p) $\displaystyle\int e^{\cos x}\sin x\,dx\,.$

Aufgabe 7
Berechnen Sie mittels Partialbruchzerlegung:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx\,,\ a\neq 0\,,$ b) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3-6x^2+9x}\,dx\,,$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+2x^2+x}\,dx\,,$
d) $\displaystyle\int \frac{x^5+3x^3+2x+1}{x^4+3x^2+2}\,dx\,,$
e) Welchen Inhalt schließt der Graph von f mit der x-Achse ein, wobei $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-5}\,,$

f) $\displaystyle\int \frac{2x^3-x^2-6x-17}{x^2-x-6}\,dx\,,$ g) $\displaystyle\int \frac{4-x}{x^3-2x^2+2x}\,dx\,,$ h) $\displaystyle\int \frac{9x^2+9}{(x^2+3)(x^2-3)}\,dx\,.$

Aufgabe 8
Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int \sqrt{2x+3}\,dx\,,$ b) $\displaystyle\int (3x+4)^2\,dx\,,$ c) $\displaystyle\int \cos(3x+1)\,dx\,,$

d) $\displaystyle\int x^2\sin(2x)\,dx\,,$ e) $\displaystyle\int (x^3+x^2-1)e^{2x-4}\,dx\,,$ f) $\displaystyle\int e^{\sin x}\cos x\,dx\,,$

g) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx\,,$ h) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx\,,$ i) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (e^{2x}-1)\,dx\,,$

j) $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x-1)^3}{x}\,dx\,,$ k) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx\,,$ l) $\displaystyle\int_1^\infty x^n\,dx$, mit $n\in\mathbb{R}$ und $n<-1\,,$

m) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx\,.$

Aufgabe 9
Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale, falls diese existieren:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx\,,$ b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\,,$ c) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx\,,$

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \ln|x|\,dx\,,$ e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx\,,$ f) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx\,,\ 0<a<b\,,$

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{2x}\,dx\,,$ h) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx\,,$ i) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx\,.$

Aufgabe 10
Berechnen Sie die Fläche, welche jeweils von den folgenden Kurven eingeschlossen wird. Fertigen Sie zunächst eine Skizze an:

a) $k_1\colon y=x^2-4\,,\quad k_2\colon y=-x^2+4$

b) $k_1\colon y=-x^3+x\,,\quad k_2\colon y=x^4-1$

c) $k_1\colon y=\sqrt{x+1}\,,\quad k_2\colon y=\cos x\,,\quad k_3\colon y=0$ im II. Quadranten.

Aufgabe 11
Es sei

$$f : \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 3\} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) := \sqrt{6-2x}\,.$$

Welchen Flächeninhalt schließt der Graph von f mit den beiden Koordinatenachsen ein?

Aufgabe 12
Eine Masse m_1 wird gemäß

$$F(r) = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

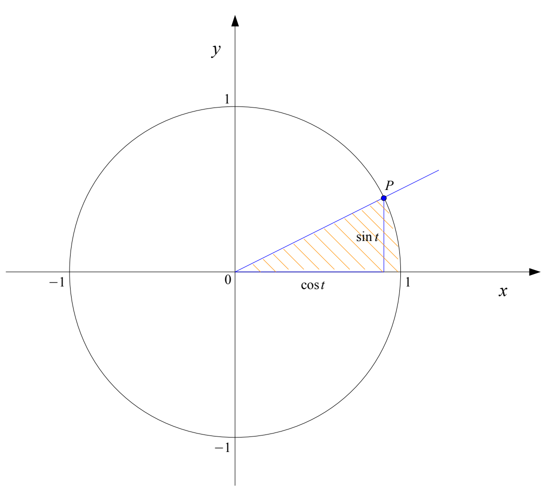
angezogen. Dabei ist $m_2 = 5,98 \cdot 10^{24}\,kg$ die Erdmasse und $G = 6,670 \cdot 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}$ die Gravitationskonstante.

a) Berechnen Sie die mechanische Arbeit W, die benötigt wird, um $m_1 = 1\,kg$ von der Erdoberfläche $r_0 = 6370\,km$ aus dem Schwerefeld der Erde zu bringen.

b) Wie hoch ist die Fluchtgeschwindigkeit?

Aufgabe 13
Gegeben ist der Punkt $P(x, y)$ auf dem Einheitskreis

$$x^2 + y^2 = 1\,.$$



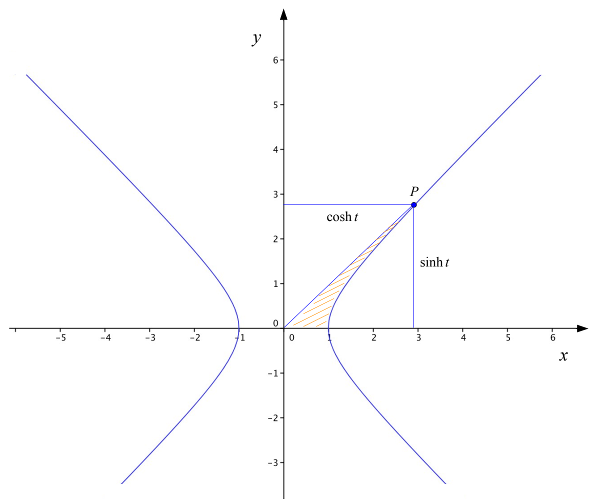
Bezeichnet t den Winkel in Bogenmaß gegen die positive x-Achse, so gilt

$$x = \cos t\,,\; y = \sin t\,, 0 \leq t < 2\pi\,.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der besprochenen Integrationsmethoden, dass sie schraffierte Sektorfläche $\frac{t}{2}$ beträgt.

Aufgabe 14
Gegeben ist der Punkt $P(x, y)$ auf der Hyperbel

$$x^2 - y^2 = 1\,.$$



Zeigen Sie: Setzt man

$$x = \cosh t\,,\ y = \sinh t\,, 0 \leq t < \infty\,,$$

so beträgt die schraffierte Sektorfläche ebenfalls $\frac{t}{2}$.

Aufgabe 15
Berechnen Sie den linearen und quadratischen Mittelwert von

a) $f(x) = \ln x$ in $[1, 5]$,

b) $f(x) = \sin x$ in $[0, \pi]$,

c) $f(x) = x^2$ in $[2, 4]$.

Aufgabe 16
Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale:

a)

$$\iint\limits_B e^{x+y}\,dA$$

über das Rechteck $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$,

b)

$$\iint\limits_B xy\,dA$$

über das Dreieck $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$.

c) In der Ebene ist durch die Eigenschaften

$$x \le 1,\ y \le 1,\ x + y \ge 1$$

ein Bereich B gegeben. Skizzieren Sie den Bereich B und berechnen Sie dessen Flächeninhalt $\iint\limits_B dA$.

Aufgabe 17
Die Schwerpunktskoordinaten einer Fläche sind gegeben durch

$$x_S = \frac{1}{A}\iint\limits_B x\,dA\,,\quad y_s = \frac{1}{A}\iint\limits_B y\,dA\,.$$

Bestimmen Sie die Schwerpunktskoordinaten für

a) das Quadrat

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$$

b) die Fläche B, die von den Geraden $y = x + 2$ und der Parabel $y = -x^2 + 4$ begrenzt wird. Skizzieren Sie zunächst das Gebiet B.

c) die Kardioide

$$r(\varphi) = 1 + \cos\varphi\,,\ 0 \le \varphi < 2\pi\,.$$

Aufgabe 18

a) Sei B die von den Verbindungslinien zwischen $A(0,0)$, $B(10,1)$ und $C(1,1)$ berandete Punktmenge. Berechnen Sie

$$\iint\limits_B \sqrt{xy - y^2}\, dA\,.$$

b) Sei B von der x-Achse und dem oberen Halbkreis mit $(x-2)^2 + y^2 = 1$ begrenzt. Berechnen Sie

$$\iint\limits_B xy\, dA\,.$$

c) Sei B die von den Verbindungslinien zwischen $A(1,1)$, $B(2,2)$ und $C(1,2)$ berandete Punktmenge. Berechnen Sie

$$\iint\limits_B xy\, dA\,.$$

Aufgabe 19
Berechnen Sie jeweils das Massenträgheitsmoment I_z für

a) einen homogenen Würfel der Kantenlänge l mit der z-Achse als Symmetrieachse,

b) einen homogenen Kreiszylinder der Höhe H und dem Radius R mit der z-Achse als Symmetrieachse orthogonal zur Kreisfläche des Zylinders.

Aufgabe 20
Berechnen Sie die Trägheitsmomente I_x, I_y und I_0 des Viertelkreises mit Radius R.

Aufgabe 21
Berechnen Sie

$$\iiint\limits_K f\, d^3x$$

für

a)

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq x \leq 2\,,\ 0 \leq y \leq x\,,\ 0 \leq z \leq x+y+1\}\,,\ f(x,y,z) = 2xz+y^2\,,$$

b)

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\,,\ x \leq y \leq 2\,,\ 0 \leq z \leq y\}\,,\ f(x,y,z) = e^z \sin x - y\,.$$

Aufgabe 22
Sei K die obere Hälfte der Kugel mit Radius R und Mittelpunkt $(0,0,0)$. Berechnen Sie

$$\iiint\limits_K (x^2 + y^2 - xz) d^3x\,.$$

Aufgabe 23
Berechnen Sie Volumen und Mantelfläche der Rotationsfläche, die Sie bei Rotation um die x-Achse für

a) $f(x) = \cos x\,,\ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\,,$

b) $y^2 = 2px\,,\ p > 0\,,\ 0 \leq x \leq h\,,$

erhalten.

Aufgabe 24
Aus einer Kugel mit Radius R wird ein Zylinder mit Radius a, $a < R$, entfernt. Die Achse des Zylinders geht dabei durch den Kugelmittelpunkt. Berechnen Sie das Volumen des verbleibenden Teils.

Aufgabe 25
In einem Zylinder mit Radius R und Höhe H befindet sich ein Material mit Dichte

$$\rho(z) = \frac{\rho_2 - \rho_1}{H} z + \rho_1 \,, \ \rho_2 < \rho_1 \,.$$

Berechnen Sie die Gesamtmasse des Materials.

Aufgabe 26
Berechnen Sie jeweils die Länge folgender Kurven

$$f : I \to \mathbb{R}^2 \,, \quad x \mapsto (x, y(x))$$

mit

a) $y(x) = x^2$ und $I = [0, 1]$.

b) $y(x) = \ln x$ und $I = [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$.

c) $y(x) = x^{\frac{3}{2}}$ und $I = [0, 4]$.

Aufgabe 27
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $r \in \mathbb{R}_+^*$. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}^3, \quad f(t) := (r \cos t, r \sin t, ct) \,.$$

Aufgabe 28
Gegeben sei $c \in \mathbb{R}^*$ und mit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) := (e^{ct} \cos t, e^{ct} \sin t)$$

die *logarithmische Spirale*.

a) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sei $L_{a,b}$ die Bogenlänge der Kurve $f\big|_{[a,b]}$.
Berechnen Sie $L_{a,b}$.

b) Existiert

$$\lim_{a \to -\infty} L_{a,0} \,?$$

Aufgabe 29
Berechnen Sie die Bogenlänge folgender Kurven:

a) Astroide

$$x(t) = R\cos^3 t\,,\ y(t) = R\sin^3 t\,,\ \text{wobei } R > 0\,,\ 0 \le t < 2\pi\,,$$

b) Archimedische Spirale

$$r(\varphi) = a\varphi\,,\ \text{wobei } a > 0\,,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\,,$$

c) Kardioide

$$r(\varphi) = 2(1 - \cos\varphi)\,,\ \text{wobei } 0 \le \varphi < 2\pi\,,$$

d) Berechnen Sie die Länge des Drahtseils, das gemäß der Kettenlinie

$$f(x) = 5\cosh(\frac{x}{5})$$

durchhängt. Die beiden Aufhängepunkte sind in gleicher Höhe und haben einen Abstand von $14{,}3$ voneinander.

e) $y^2 = \dfrac{1}{4}x^3\,,$ wobei $0 \le x \le 4\,.$

Aufgabe 30
Ein Massepunkt befindet sich zur Zeit t am Ort (x, y) mit

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2\,,\ y(t) = \frac{1}{9}(6t + 9)^{\frac{3}{2}}\,.$$

Berechnen Sie die Länge des Weges, die der Massepunkt im Zeitintervall $[-1, 5]$ zurücklegt.

Aufgabe 31
Sind die folgenden Vektorfelder Gradientenfelder? Geben Sie gegebenenfalls die Potentialfunktionen an.

a) $v(x, y, z) = (y, z, x)$,

b) $G(x, y, z) = (yz, zx, xy)$,

c) $H(x, y) = (3x^2y, x^3)$,
wobei das Potential im Punkt $P(1, 1)$ den Wert 2 habe,

d) $M(x, y, z) = (2x + y, x + 2yz, y^2 + 2z)$,
wobei das Potential im Punkt $P(1, 1, 0)$ den Wert 2 habe.

Aufgabe 32
Berechnen Sie

$$\int_C (v, \tau) ds \, ,$$

wobei $v(x, y, z) = (xy, x^2 + yz, xz)$ und

a) $s(t) = (t, 1 - t, t^2)$, $1 \leq t \leq 2$,

b) $s(t) = (1 + t, -t, 1 + 3t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Aufgabe 33
Berechnen Sie die notwendige Arbeit, um einen Massepunkt im Kraftfeld

$$v(x, y, z) = (-y, -x, z)$$

von $P_1(1, 0, 0)$ nach $P_2(-1, 0, \pi)$ zu bewegen, wobei die Bewegung

a) entlang der Schraubenlinie

$$s(t) = (\cos t, \sin t, t) \, ,$$

b) entlang der geradlinigen Verbindung von P_1 und P_2,

c) entlang einer beliebigen Verbindung, falls das betreffende Kurvenintegral wegunabhängig ist, erfolgen soll.

Aufgabe 34
Berechnen Sie die notwendige Arbeit, um einen Massepunkt im Kraftfeld

$$v(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x)$$

von $P_1(1,0)$ nach $P_2(0,1)$ zu bewegen, wobei

a) $s(t) = (\cos t, -\sin t)\,,\quad 0 \le t \le \frac{3}{2}\pi\,,$

b) $s(t) = (\cos t, \sin t)\,,\quad 0 \le t \le \frac{1}{2}\pi\,.$

c) Begründen Sie, dass sich das Poincarésche Lemma nicht anwenden lässt.

Aufgabe 35
Berechnen Sie

$$\int_{P_1}^{P_2} (E,\tau)\,ds\,,$$

wobei

a) $P_1(1,0,0)$, $P_2(2,0,0)$ und

$$E(x,y,z) = \frac{3}{r^5}\begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ xz \end{pmatrix} - \frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

mit $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

b) $P_1(1,1)$, $P_2(2,0)$ und

$$E(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y + y^3 \\ x^3 + 3xy^2 \end{pmatrix}\,,$$

c) $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,2,2)$ und

$$E(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2y^2 \\ 4xy - 3z^3 \\ -9yz^2 \end{pmatrix}\,.$$

Aufgabe 36
Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes

$$H(x, y) = (3x^2y + 1, x^3 + 2)$$

über die Kurve

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\,, \quad t \mapsto (t, 2t^2)$$

von $P_1 = (0, 0)$ nach $P_2 = (1, 2)$.

3 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Differentialgleichungen stellen einen Zusammenhang zwischen einer gesuchten Funktion und einigen ihrer Ableitungen her.

3.1 Beispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen

- Die (linear) gedämpfte Schwingung (mit äußerer Kraft)

$$Dx(t) + kx'(t) + mx''(t) = F_a(t)$$

- Der RLC-Serienschwingkreis mit äußerer Spannung

$$\frac{1}{C}Q(t) + RQ'(t) + LQ''(t) = U_a(t)$$

- Diffusiver Ausgleichsprozess

$$c'(t) = k(c_a - c(t))$$

- Das mathematische Pendel

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi(t) = 0$$

- Die logistische Differentialgleichung

$$P'(t) = \gamma P(t) - \tau P^2(t)$$

- Kinetik bimolekularer chemischer Reaktionen ($A + B \to C$)

$$c'(t) = k(c_a - c(t))(c_b - c(t))\,.$$

- Symbiose-Modell

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\ ,\quad \alpha,\beta > 0$$

Anmerkung: Differentialgleichungen

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

und entsprechend Differentialgleichungssysteme heißen *autonom*, wenn die Funktion f die Variable x *nicht explizit* enthält.

3.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

Definition: Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ und

$$f : G \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y)$$

eine stetige Funktion. Dann wird

$$y' = f(x, y)$$

als eine *Differentialgleichung erster Ordnung* bezeichnet.

3.2.1 Lineare Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

Sei $I \subset \mathbb{R}$ und seien $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann heißt

$$y' = a(x)y + b(x)$$

lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

Ist $b = 0$, so wird diese Differentialgleichung als *homogen*, ansonsten als *inhomogen* bezeichnet.
Sei $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y' = a(x)y\,,$$

die der Bedingung

$$\varphi(x_0) = c$$

genügt. Für diese Lösung gilt

$$\varphi(x) = c\exp\Big(\int\limits_{x_0}^{x} a(t)\,dt\Big)\,.$$

Beispiel

Sei $k \in \mathbb{R}$. Für die Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y' = ky$$

mit der Anfangsbedingung

$$\varphi(x_0) = c$$

gilt

$$\varphi(x) = ce^{k(x-x_0)}\,.$$

Anmerkung: Beispielsweise kann die Konzentration $y(t)$ eines Stoffes A, die, infolge einer chemischen Reaktion $A \to B$, abnimmt und der Differentialgleichung

$$y'(t) = -\kappa y(t)$$

und der Anfangsbedingung

$$y(t_0) = y_0$$

genügt, auf diese Art bestimmt werden.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto f(x, y)$$

eine stetige Funktion. Dann wird

$$y' = f(x, y)$$

als *System von* n *Differentialgleichungen erster Ordnung*, und für $n = 1$ als *Differentialgleichung erster Ordnung* bezeichnet.

Geometrische Darstellung

Durch $y' = f(x, y)$ wird ein Richtungsfeld von $f(x, y)$ beschrieben, da durch die Differentialgleichung 1. Ordnung die Steigung in jedem Punkt $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

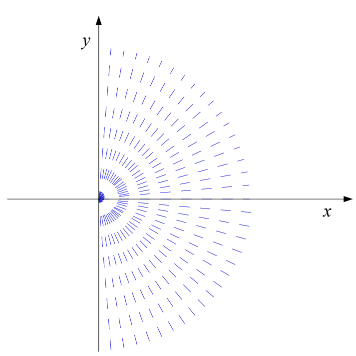


Abbildung 3.1 Richtungsfeld für $y' = \dfrac{y}{x}$

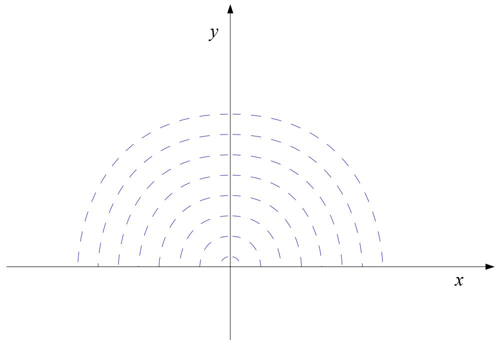


Abbildung 3.2 Richtungsfeld für $y' = -\dfrac{x}{y}$

Abbildung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung auf ein System 1. Ordnung

Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

lässt sich mittels

$$\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \\ ... \\ ... \\ ... \\ y_{n-2}' \\ y_{n-1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ ... \\ ... \\ y_{n-1} \\ f(x, y_0, y_1, ..., y_{n-1}) \end{pmatrix}$$

auf ein System 1. Ordnung transformieren.

Beispiel

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'' + \omega^2 \sin y = 0\,.$$

Eine Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = f(x, y, y')$$

lässt sich mittels

$$y_0' := y_1$$

$$y_1' := f(x, y_0, y_1)$$

auf ein System 1. Ordnung abbilden. Wir schreiben hier

$$y' = \begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ f(x, y_0, y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ -\omega^2 \sin y_0 \end{pmatrix} .$$

Die Methode der Variation der Konstanten

Die Methode der Variation der Konstanten lässt sich zwar auch auf gewöhnliche lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung anwenden, jedoch beschränken wir uns hier auf Differentialgleichungen erster Ordnung.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

Dann gibt es zu beliebigem $x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung

$$\psi : I \to \mathbb{R}$$

der Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + b(x)$$

mit der Anfangsbedingung $\psi(x_0) = c$.

Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\varphi'(x) = a(x)\varphi(x)$$

mit $\varphi(x_0) \neq 0$. Eine beliebige Lösung $\psi : I \to \mathbb{R}$ der inhomogenen Gleichung lässt sich schreiben als

$$\psi(x) = \varphi(x)u(x) ,$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion $u : I \to \mathbb{R}$.

Für die Ableitung ψ' erhalten wir

$$\psi' = \varphi' u + \varphi u' = a\,\varphi u + \varphi u' .$$

Da ψ eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist, gilt außerdem

$$\psi' = a\,\psi + b = a\,\varphi u + b .$$

Daraus folgt, dass

$$\varphi u' = b$$

und somit

$$u(x) - u(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)^{-1} b(t)\, dt$$

ist. O. B. d. A. lässt sich $\varphi(x_0) = 1$ setzen. Damit gilt

$$c = \psi(x_0) = u(x_0)\,.$$

Die Lösung unseres Anfangswertproblems lautet daher

$$\psi(x) = \varphi(x)(c + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)^{-1} b(t)\, dt)\,,$$

wobei

$$\varphi(x) = \exp(\int\limits_{x_0}^{x} a(t)\, dt)\,.$$

Beispiel

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = 2xy + x^3 \ \text{ mit } \ y(0) = -1\,.$$

Die gesuchte Lösung der homogenen Gleichung

$$y' = 2xy$$

lautet

$$\varphi(x) = \exp\left(\int\limits_{0}^{x} 2t\, dt\right) = e^{x^2}\,.$$

Daher gilt für die Lösung ψ der inhomogenen Gleichung, unter der Anfangsbedingung $\psi(0) = -1$,

$$\psi(x) = e^{x^2}\left(-1 + \int\limits_{0}^{x} t^3 e^{-t^2}\, dt\right)\,.$$

Nach Substitution und partieller Integration erhalten wir

$$\int t^3 e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\int u e^u\, du = \frac{1}{2}(ue^u - \int e^u\, du) = \frac{1}{2}(u-1)e^u + C$$

$$= -\frac{1}{2}(t^2+1)e^{-t^2} + C$$

und schließlich

$$\psi(x) = e^{x^2}\left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}\right) = -\frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}(x^2+1)\,.$$

3.2.2 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene (eigentliche oder uneigentliche) Intervalle und $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, wobei $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$ gelte.

Dann ist das Anfangswertproblem

$$y' = f(x)g(y) \;\text{ in } I \times J \;\text{ mit } y(x_0) = y_0$$

in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 *eindeutig lösbar*.

Die Lösung erhalten wir, indem wir die Gleichung

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

nach y auflösen.

Beispiel

Das Anfangswertproblem

$$y'y + x = 0\,, \quad y(1) = 1$$

lässt sich mit Hilfe der Integration

$$\int y\,dy = -\int x\,dx$$

lösen. So ergibt sich

$$\frac{y^2}{2} = C - \frac{x^2}{2}\,.$$

Die Anfangsbedingung $y(1) = 1$ impliziert, dass $C = 1$ ist.

Schließlich erhalten wir

$$y(x) = \sqrt{2 - x^2}\,.$$

3.2.3 Die Differentialgleichung $y' = f(\dfrac{y}{x})$

Sei $I \subset \mathbb{R}$ und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Differentialgleichung

$$y' = f(\frac{y}{x})\,, \text{ mit } x \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}\,,$$

lässt sich, mittels der Substitution $z := \dfrac{y}{x}$, in die Differentialgleichung

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$$

umwandeln. Diese Differentialgleichung gehört zu dem bereits behandelten Typ von Differentialgleichungen mit getrennten Variablen.

Beispiel

Die Differentialgleichung

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2,\ x \neq 0\,,$$

geht, mittels $z := \dfrac{y}{x}$, über in

$$z' = \frac{1}{x}(1 + z^2)\,.$$

Demnach erhalten wir

$$\int \frac{1}{1+z^2}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx$$

und schließlich $y = y(x)$ nach Umformung von

$$\arctan z = \ln|x| + C\,.$$

3.3 Gewöhnliche Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Definition: Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und

$$f : G \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y)$$

eine stetige Funktion.

Dann wird

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

als eine *Differentialgleichung n-ter Ordnung* bezeichnet.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ und seien $b, a_k : I \to \mathbb{R}$, mit $0 \leq k \leq n-1$, stetige Funktionen. Dann heißt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung.
Ist $b = 0$, so wird diese Differentialgleichung als *homogen*, ansonsten als *inhomogen* bezeichnet.

Wir nennen

- L_H den Vektorraum aller Lösungen der homogenen und
- L_I die Menge aller Lösungen der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung.

Dann gilt für ein beliebiges $\psi_0 \in L_I$

$$L_I = \psi_0 + L_H\ .$$

Demnach setzt sich die allgemeine Lösung y einer inhomogenen linearen Differentialgleichung

- aus der allgemeinen Lösung y_h der zugehörigen homogenen Gleichung und
- einer partikulären (speziellen) Lösung y_p der inhomogenen Gleichung zusammen.

Dabei gilt

$$y = y_p + y_h\ .$$

3.3.1 Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Sei

$$D := \frac{d}{dx} \text{ und } P(D) = a_0 + a_1 D + ... + a_n D^n.$$

Dann lässt sich eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten folgendermaßen schreiben:

$$P(D)y = 0\,.$$

Es gilt

$$P(D)e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x} \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C}\,,$$

wobei $P(\lambda)$ ein Polynom ist. Es wird als *charakteristisches Polynom* der Differentialgleichung bezeichnet.

Nullstellen von $P(\lambda)$

a) Das charakteristische Polynom $P(\lambda)$ habe n paarweise verschiedene Nullstellen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$.

   Dann bilden die Funktionen $\varphi_l : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\varphi_l(x) := e^{\lambda_l x}, \quad l = 1, ..., n$$

   ein Fundamentalsystem von Lösungen (= Basis des Lösungsvektorraumes) der Differentialgleichung $P(D)y = 0$.

b) Das charakteristische Polynom $P(\lambda)$ habe r paarweise verschiedene Nullstellen $\lambda_l \in \mathbb{C}$, $1 \leq l \leq r$, mit den *Vielfachheiten* k_l.

   Dann bilden die Funktionen $\varphi_{lm} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\varphi_{lm}(x) := x^m e^{\lambda_l x}, \quad 1 \leq l \leq r,\ 0 \leq m \leq k_l - 1$$

   ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung $P(D)y = 0$.

Die allgemeine Lösung φ der Differentialgleichung ist die Linearkombination

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\,, \quad \text{mit } c_i \in \mathbb{C}\,,$$

des Lösungsfundamentalsystems $\{\varphi_i\}$.

Beispiele

- Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung

  $$y'' + 4y' + 3y = 0$$

  lautet

  $$P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 3\,.$$

  Die Nullstellen von $P(\lambda)$ sind

  $$\lambda_1 = -1\,,\ \lambda_2 = -3\,.$$

  Als allgemeine Lösung φ erhalten wir demnach

  $$\varphi(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}\,.$$

- Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung

  $$y''' - y'' - 2y' = 0$$

  lautet

  $$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda\,.$$

  Die Nullstellen von $P(\lambda)$ sind

  $$\lambda_1 = 0\,,\ \lambda_2 = -1\,, \lambda_3 = 2\,.$$

  Als allgemeine Lösung φ erhalten wir demnach

  $$\varphi(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}\,.$$

- Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung

  $$y''' - 2y'' + y' = 0$$

  lautet

  $$P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda - 1)^2\,.$$

  Die Nullstellen von $P(\lambda)$ sind

  $$\lambda_1 = 0\,,\ \lambda_2 = 1\,\text{(doppelt)}\,.$$

  Als allgemeine Lösung φ erhalten wir demnach

  $$\varphi(x) = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 x e^{x}\,.$$

Anwendungen

Freie gedämpfte mechanische Schwingungen

Die Auslenkung $x(t)$ genüge der Differentialgleichung

$$Dx(t) + kx'(t) + mx''(t) = 0\,,$$

wobei

- Trägheitskraft: $mx''(t)$
- Reibungskraft: $-kx'(t)$
- Rückstellkraft: $-Dx(t)$.

Der RLC-Serienschwingkreis ohne äußere Spannungsquelle

Hier genügt die Ladung $Q(t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{1}{C}Q(t) + RQ'(t) + LQ''(t) = 0\,,$$

wobei

- Kapazität: C
- Ohmscher Widerstand: R
- Induktivität: L.

Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten nun die allgemeine Lösung der Gleichung

$$y''(t) + 2\mu\, y'(t) + \omega_0^2\, y(t) = 0\,,$$

wobei $\omega_0 \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R}_+^*$, und Lösungen unter bestimmten Anfangsbedingungen.

Schwingungen unter der Bedingung $0 < \mu < \omega_0$

Hier erhalten wir

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0\,.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind die komplexen Zahlen

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} = -\mu \pm i\omega\,,$$

$$\text{wobei } \omega := \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}.$$

Die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{(-\mu + i\omega)t} + c_2 e^{(-\mu - i\omega)t}$$

lässt sich umformen zu

$$y(t) = e^{-\mu t}(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t})\,.$$

Mit Hilfe der *Eulerschen Formel*

$$e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t)$$

erhalten wir

$$y(t) = e^{-\mu t}(d_1 \cos(\omega t) + d_2 \sin(\omega t))\,.$$

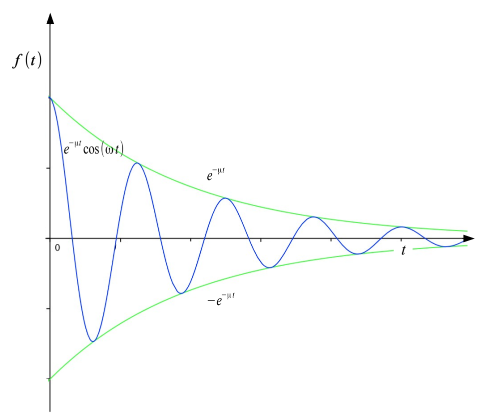


Abbildung 3.3 Gedämpfte Schwingung

Mit den Anfangsbedingungen

$$y(t=0) = y_0$$

und

$$y'(t=0) = 0$$

folgt

$$y_0 = y(t=0) = e^{-\mu \cdot 0}(d_1 \cos(\omega \cdot 0) + d_2 \sin(\omega \cdot 0))$$

und

$$0 = y'(t=0) = -\mu e^{-\mu\cdot 0}(d_1\cos(\omega\cdot 0) + d_2\sin(\omega t\cdot 0)$$
$$+ e^{-\mu\cdot 0}(-d_1\omega\sin(\omega\cdot 0) + d_2\omega\cos(\omega\cdot 0))\,.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen impliziert

$$d_1 = y_0$$

und die zweite

$$d_2 = \frac{\mu}{\omega}\cdot y_0\,.$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$y(t) = y_0 e^{-\mu t}(\cos(\omega t) + \frac{\mu}{\omega}\sin(\omega t))\,.$$

Der aperiodische Grenzfall (für $\mu = \omega_0$)

Die Lösung von

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0$$

ist

$$\lambda_{1,2} = -\mu\,.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet daher

$$y(t) = e^{-\mu t}(c_1 + c_2 t)\,.$$

Unter der Anfangsbedingung $y(t=0) = y_0$ und $y'(t=0) = 0$ erhalten wir die eindeutig bestimmte Lösung

$$y(t) = y_0 e^{-\mu t}(1 + \mu t)\,,$$

wobei $\mu = \omega_0$.

Der aperiodische Fall (Kriechfall) (für $\mu > \omega_0$)

Die Lösungen von

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0$$

sind

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} < 0\,.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet daher

$$y(t) = c_1 e^{-\mu_1 t} + c_2 e^{-\mu_2 t} \quad \text{wobei } \mu_i := -\lambda_i > 0\,.$$

Unter der Anfangsbedingung $y(t = 0) = y_0$ und $y'(t = 0) = 0$ erhalten wir die eindeutig bestimmte Lösung:

$$y(t) = \frac{y_0}{\mu_2 - \mu_1}(\mu_2 e^{-\mu_1 t} - \mu_1 e^{-\mu_2 t})\,.$$

3.3.2 Inhomogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Zu den Methoden, eine partikuläre Lösung einer

inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

zu finden, gehören

- die *Variation der Konstanten* und
- die *Laplace-Transformation*.

Es gibt auch eine Reihe von Ansatzfunktionen, die sich nutzen lassen.

Ansatzfunktionen für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

Es sei

$$P(D) = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0$$

mit Konstanten $a_k \in \mathbb{R}$. Ferner sei $I \subset \mathbb{R}$ und

$$b : I \to \mathbb{R}$$

sei eine stetige Funktion.

Dann lassen sich mittels folgender Ansatzfunktionen partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$P(D)y = b$$

bestimmen.

Seien $b_i, A_i \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$.

- Ist b ein Polynom mit $b(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m$
  und
  - $P(\lambda = 0) \neq 0$, so ist
    $$y_p(x) = A_0 + A_1 x + ... + A_m x^m$$
  - $\lambda = 0$ eine k-fache Nullstelle von $P(\lambda)$, so ist
    $$y_p(x) = x^k(A_0 + A_1 x + ... + A_m x^m)$$

  ein Lösungsansatz.
- Ist $b(x) = (b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m)e^{\alpha x}$
  und
  - $P(\lambda = \alpha) \neq 0$, so ist
    $$y_p(x) = (A_0 + A_1 x + ...A_m x^m)e^{\alpha x}$$
  - $\lambda = \alpha$ eine k-fache Nullstelle von $P(\lambda)$, so ist
    $$y_p(x) = x^k(A_0 + A_1 x + ...A_m x^m)e^{\alpha x}$$

  ein Lösungsansatz.
- Ist $g(x) = \cos(\beta x)$ oder $g(x) = \sin(\beta x)$, $b(x) = (b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m)g(x)$
  und
  - $P(\lambda = i\beta) \neq 0$, so ist
    $$y_p(x) = (A_0 + A_1 x + ...A_m x^m)\cos(\beta x) + (B_0 + B_1 x + ...B_m x^m)\sin(\beta x)$$
  - $\lambda = i\beta$ eine k-fache Nullstelle von $P(\lambda)$, so ist
    $$y_p(x) = x^k((A_0 + A_1 x + ...A_m x^m)\cos(\beta x) + (B_0 + B_1 x + ...B_m x^m)\sin(\beta x))$$

  ein Lösungsansatz.

Beispiel

Um die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y''' - y = 1 + x^3$$

zu lösen, bestimmen wir die allgemeine Lösung y_h der homogenen Gleichung

$$y''' - y = 0$$

und die partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Gleichung mit dem oben beschriebenen Ansatz

$$y_p(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \,.$$

Für die Lösung y_h der homogenen Gleichung bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) \,.$$

Da für die Nullstellen

$$\lambda_1 = 1 \,, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

gilt, folgt

$$y_h(x) = c_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}} \left(c_2 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_3 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \right) \,.$$

Setzen wir y_p in die inhomogene Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$3 \cdot 2 \cdot A_3 - (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3) = 1 + x^3$$

und demnach

$$A_3 = -1 \,, \; A_2 = 0 \,, \; A_1 = 0 \,, A_0 = -7 \,.$$

Daher gilt

$$y_p(x) = -7 - x^3 \,.$$

Die allgemeine Lösung y der inhomogenen Gleichung lautet daher

$$y(x) = -7 - x^3 + c_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}} \left(c_2 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_3 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \right) \,.$$

Anwendungen

Erzwungene gedämpfte mechanische Schwingungen

Hier betrachten wir ein System, das sinusförmig schwingen kann, beispielsweise ein quasielastisches Pendel, dessen Schwingungen durch die Stokes-Reibung gedämpft werden.

Die Auslenkung $x(t)$ genüge der Differentialgleichung

$$Dx(t) + kx'(t) + mx''(t) = F_a(t)\,.$$

Es wirke eine periodische äußere Kraft $F_a(t)$, wobei

$$F_a(t) = F_0 \cos(\omega t)\,.$$

Die Kraft $F_a(t)$ ist daher harmonisch veränderlich mit der konstanten Kreisfrequenz ω und der konstanten Anregungsamplitude F_0.

Zusätzlich gehen wir hier davon aus, dass

$$0 < \frac{k}{2m} < \sqrt{\frac{D}{m}}$$

gilt.

Um eine partikuläre Lösung unserer inhomogenen Gleichung

$$y''(t) + 2\mu\, y'(t) + \omega_0^2\, y(t) = y_a(t)$$

zu finden, können wir die Differentialgleichung zu einer Differentialgleichung für komplexe Funktionen verallgemeinern und den Realteil dieser Lösung bestimmen.

Wir betrachten daher die Differentialgleichung

$$z''(t) + 2\mu\, z'(t) + \omega_0^2\, z(t) = y_{0,a} e^{i\omega t}\,,$$

wobei μ, ω_0 und $y_{0,a}$ wie bisher definiert sind.

Mit dem Ansatz

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t}$$

erhalten wir

$$z_0 = \frac{y_{0,a}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\mu\omega}$$

und damit eine partikuläre Lösung $y_p(t)$.

Die komplexe Amplitude z_0 lässt sich auch als

$$z_0 = Ae^{i\varphi}, \quad \text{mit} \quad A \in \mathbb{R},$$

schreiben.

Der Ansatz

$$z(t) = Ae^{i(\omega t+\varphi)} \,,$$

impliziert

$$A(-\omega^2 + 2i\mu\omega + \omega_0^2) = y_{0,a}e^{-i\varphi} \,.$$

Daraus folgt für die Amplitude der erzwungenen Schwingung

$$A = \frac{y_{0,a}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}} \,.$$

Betrachten wir nun die Amplitude A, für $\mu < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$, so zeigt sich, dass deren Maximalwert bei $\omega = \omega_R := \sqrt{\omega_0^2 - 2\mu^2}$ angenommen wird und

$$A_{max} = A(\omega_R) = \frac{y_{0,a}}{2\mu\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}} = \frac{y_{0,a}}{2\mu\omega_\mu}$$

beträgt.

Die Frequenz ω_R heisst daher *Resonanzfrequenz*.

3.4 Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung

3.4.1 Systeme von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Da sich eine Differentialgleichung n-ter Ordnung als System 1. Ordnung darstellen lässt, kann die folgende Lösungstheorie auch für Differentialgleichungen höherer Ordnung genutzt werden, sofern diese konstante Koeffizienten haben.

Sei $y(x), b(x) \in \mathbb{R}^n$, b auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ stetig und $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit konstanten Koeffizienten a_{ij}. Durch

$$y' = Ay + b(x)\,,\ y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$$

ist ein Anfangswertproblem gegeben.

- Ist $b(x) = 0$, so besitzt dieses Anfangswertproblem für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ folgende, eindeutig bestimmte Lösung auf $\mathbb{R}$:

  $$\varphi(x) = \exp((x - x_0)A) \cdot y_0\,.$$

- Das Anfangswertproblem besitzt für beliebige Werte $x \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ folgende, eindeutig bestimmte Lösung auf I:

  $$\psi(x) = \exp((x - x_0)A) \cdot y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \exp((x - \xi)A) b(\xi)\, d\xi\,,\quad \xi \in I\,.$$

Hierbei tritt die Matrixexponentialfunktion auf. Einige ihrer Eigenschaften sind im folgenden Abschnitt aufgeführt.

Beispiel

Das Anfangswertproblem

$$y' = Ay(t)\,,\quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

lässt sich mittels

$$y(t) = \exp(A_t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lösen, wobei

$$A_t := \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} .$$

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt

$$p(A_t) = A_t^2 + t^2 E = 0$$

und demnach

$$A_t^{2n} = (-1)^n t^{2n} E \,, \quad n \in \mathbb{N} .$$

Mit der unten angegebenen Definition von $\exp$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \exp A_t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A_t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!}(-1)^n t^{2n} E + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n t^{2n} A_t \\ &= E \cos t + A_t \frac{\sin t}{t} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und folglich

$$y(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix} .$$

Die Matrixexponentialfunktion

Für Matrizen $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ setzen wir

$$\exp A : M(n \times n, \mathbb{K}) \to M(n \times n, \mathbb{K}) \,, \; A \mapsto \exp A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n .$$

Falls $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ mit $AB = BA$, so gilt

$$\exp A \exp B = \exp(A + B) .$$

Für

$$D := \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \cdot & & 0 \\ & & \cdot & \\ 0 & & & \cdot \\ & & & & d_n \end{pmatrix}$$

gilt

$$\exp D = \begin{pmatrix} e^{d_1} & & & \\ & \cdot & & 0 \\ & & \cdot & \\ 0 & & & \cdot \\ & & & & e^{d_n} \end{pmatrix}$$

Sind $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ und ist B regulär, dann gilt

$$B^{-1}(\exp A)B = \exp(B^{-1}AB)\,.$$

Andererseits ist jede Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ *trigonalisierbar*, d. h.

Zu $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ existiert eine reguläre Matrix $P \in M(n \times n, \mathbb{C})$, so dass

$$B = P^{-1}AP$$

eine obere Dreiecksmatrix ist.

Demnach ist eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ genau dann eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = Ay\,,$$

wenn die Funktion $\psi := P^{-1}\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ Lösung der Differentialgleichung

$$z' = (P^{-1}AP)z\,.$$

Daher bietet sich an, die entsprechend Differentialgleichung komponentenweise zu betrachten.

Beispiel

Sei $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ und

$$y' = Ay\,.$$

Dann können folgende Fälle auftreten:

(i) A besitzt eine Basis von Eigenvektoren $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann bilden die Funktionen $\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$\varphi_1 = a_1 e^{\lambda_1 x}\,,\ \varphi_2(x) = a_2 e^{\lambda_2 x}$$

ein Lösungsfundamentalsystem.

(ii) A besitzt zwei konjugiert-komplexe Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm i\omega\,, \quad \mu \in \mathbb{R}\,,\ \omega \in \mathbb{R}^*\,.$$

Dann sind die Eigenvektoren a_1, a_2 ebenfalls konjugiert-komplex, so dass wir

$$a_{1,2} = b \pm ic\,, \quad b, c \in \mathbb{R}^2\,,$$

schreiben können. Mit Hilfe der komplexen Lösungen

$$\varphi_k(x) = a_k e^{\lambda_k x}\,,$$

lässt sich das reelle Fundamentalsystem

$$\psi_1(x) := \frac{1}{2}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = (b\cos(\omega x) - c\sin(\omega x))e^{\mu x}\,,$$

$$\psi_2(x) := \frac{1}{2i}(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) = (b\sin(\omega x) + c\cos(\omega x))e^{\mu x}$$

herleiten. Demnach hat die allgemeine Lösung obigen homogenen Differentialgleichungssystems die Form

$$\varphi(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x)\,, \quad \text{mit } c_i \in \mathbb{R}\,.$$

Anmerkung

Für homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung, mit komplex-konjugierten Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm i\omega\,, \quad \mu \in \mathbb{R}\,,\ \omega \in \mathbb{R}^*\,.$$

des charakteristischen Polynoms, verwenden wir häufig Darstellungen mit Hilfe eines reellen Fundamentalsystems. Hierbei betrachten wir Lösungen

$$\varphi(x) = a_1 e^{\lambda_1 x} + a_2 e^{\lambda_2 x}\,, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{C}\,,$$

mit, $a_2 = \overline{a_1}$, da φ eine reellwertige Funktion ist. Mittels

$$a_{1,2} = b \pm ic\,, \quad b, c \in \mathbb{R}\,,$$

lässt sich auch

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= e^{\mu x}((a_1 + a_2)\cos(\omega x) + i(a_1 - a_2)\sin(\omega x))\\ &= e^{\mu x}(2b\cos(\omega x) + 2c\sin(\omega x))\end{aligned}$$

schreiben.

(iii) A besitzt nur einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit einem eindimensionalen Eigenraum. Dann gibt es eine reguläre Matrix $P \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$, so dass

$$B := P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & \rho \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \rho \in \mathbb{R}^* .$$

Für die Differentialgleichung

$$z' = Bz$$

ist durch

$$\psi_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda x}, \quad \psi_2(x) = \begin{pmatrix} \rho x \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda x} .$$

ein Lösungsfundamentalsystem gegeben. Hiermit erhalten wir durch

$$\varphi_i(x) = P\psi_i(x), \quad i = 1, 2,$$

ein Lösungsfundamentalsystem für unser Differentialgleichungssystem $y' = Ay$.

Mit diesem Verfahren lässt sich selbstverständlich auch das oben beschriebene Anfangswertproblem

$$y' = Ay(t), \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

behandeln. So erhalten wir

$$0 = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 .$$

Zu den Eigenwerten $\lambda_{1,2} = \pm i$ finden wir die Eigenvektoren

$$\mu \begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$$

und folglich die allgemeine Lösung

$$y(t) = c_1 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it} + c_2 \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-it} = \begin{pmatrix} d_1 \cos t - d_2 \sin t \\ d_2 \cos t + d_1 \sin t \end{pmatrix} .$$

Die Anfangsbedingung impliziert, dass $d_1 = d_2 = 1$ gilt.

3.4.2 Variation der Konstanten für lineare Systeme 1. Ordnung

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$A : I \to M(n \times n, \mathbb{K})$$

eine stetige Abbildung. Unter $\mathbb{K}$ verstehen wir $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine Basis $\phi := (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ des Vektorraumes der Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = A(x)y$$

heißt *Lösungs-Fundamentalsystem* dieser Gleichung. Schreiben wir die Lösungen $\varphi_i, i = 1, ..., n$ als Spaltenvektoren

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} \varphi_{1i} \\ \varphi_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_{ni} \end{pmatrix}, \quad i = 1, ..., n\,,$$

so lässt sich ϕ als $n \times n$-Matrix

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \varphi_{n3} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}$$

formulieren. Das n-Tupel $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ ist genau dann linear unabhängug, wenn

$$\det \phi(x_0) \neq 0$$

für wenigstens ein $x_0 \in I$ gilt.

Seien $A(t), b(t)$ stetig in $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ und

$$y' = A(x)y + b(x)\,, \quad y(x_0) = \eta\,.$$

Die eindeutig bestimmte Lösung dieses Angangswertproblems lautet

$$y(x) = \phi(x)(\eta + \int\limits_{x_0}^{x} \phi^{-1}(t)b(t)\,dt)\,,$$

wobei $\phi(x)$ das Lösungs-Fundamentalsystem des homogenen Systems mit $\phi(x_0) = E$ ist.

3.5 Die Bernoullische und die Eulersche Differentialgleichung

Bernoullische Differentialgleichung

Seien $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $\rho \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$. Die Gleichung

$$y' + a(x)y + b(x)y^\rho = 0$$

wird als *Bernoullische Differentialgleichung* bezeichnet. Sie wurde nach Jakob Bernoulli (1654-1705) benannt. Die bekannte logistische Differentialgleichung

$$\frac{dP}{dt} = \gamma P - \tau P^2\,, \quad \gamma, \tau \in \mathbb{R}_+^*\,,$$

ist ein Spezialfall.

Nach Multiplikation mit $(1-\rho)y^{-\rho}$ erhält man

$$(y^{1-\rho})' + (1-\rho)a(x)y^{1-\rho} + (1-\rho)b(x) = 0$$

und, mit $z = y^{1-\rho}$, die lineare Differentialgleichung

$$z' + (1-\rho)a(x)z + (1-\rho)b(x) = 0\,.$$

Beispiel

Die Differentialgleichung des Anfangswertproblems

$$y' + \frac{1}{1+x}y + (1+x)y^4 = 0\,,\ y(0) = -1$$

lässt sich, mit $z = y^{-3}$ und

$$a(x) = \frac{1}{1+x}\,,\ b(x) = 1+x\,,\ \rho = 4\,,$$

zu

$$z' - \frac{3}{1+x}z - 3(1+x) = 0$$

umformulieren. Mittels Variation der Konstanten erhalten wir als Lösung dieser Gleichung

$$z(x) = c(1+x)^3 - 3(1+x)^2\,,$$

wobei c eine reelle Konstante ist. Nach Rücktransformation ergibt sich

$$y(x) = \frac{1}{z^{\frac{1}{3}}} = \frac{\operatorname{sgn}(c(1+x)-3)}{\sqrt[3]{(1+x)^2|c(1+x)-3|}}\,,$$

mit der Anfangsbedingung

$$-1 = y(0) = \frac{\operatorname{sgn}(c-3)}{\sqrt[3]{|c-3|}}$$

daher $c = 2$, und für unser Anfangswertproblem schließlich

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-2x)}}\,, \quad x \in (-1, \frac{1}{2})\,.$$

Eulersche Differentialgleichung

Seien a_k, $k = 0, ..., n$, reelle Konstanten und $a_n \neq 0$. Die Gleichung

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

wird als *Eulersche Differentialgleichung* bezeichnet. Sie wurde nach Leonhard Euler (1707-1783) benannt.

Wir setzen voraus, dass $x \in \mathbb{R}_+^*$ ist. Mit

$$t := \ln x\,,\ u(t) := y(\exp(t)) = y(x)$$

und

$$D := \frac{d}{dt}$$

erhalten wir

$$De^{\alpha t}u = e^{\alpha t}(D + \alpha)u\,,$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$$

und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}Du\,,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}(e^{-t}Du) \cdot \frac{dt}{dx} = D(e^{-t}Du) \cdot e^{-t} = e^{-2t}(D-1)Du\,.$$

So lässt sich allgemein

$$\frac{d^k y}{dx^k} = e^{-kt}(D-k+1)...(D-1)Du = e^{-kt}k!\binom{D}{k}u\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

schreiben. Somit gilt

$$x^k \frac{d^k y}{dx^k} = k! \binom{D}{k} u \,, \quad k \in \mathbb{N}_0 \,,$$

wobei

$$\binom{D}{0} u := Id \,.$$

Zumal

$$\sum_{k=0}^{n} a_k k! \binom{D}{k} u = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{(k)} \,,$$

genügt $u(t)$ der linearen homogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{k=0}^{n} a_k k! \binom{D}{k} u = 0 \,.$$

Beispiel

Die Differentialgleichung des Anfangswertproblems

$$x^2 y'' - 7xy' + 15y = x \,, \; y(1) = y'(1) = 0$$

können wir, mit

$$n = 2 \,, \; a_2 = 1 \,, \; a_1 = -7 \,, \; a_0 = 15 \,, \; x = e^t$$

und

$$(a_2 2! \binom{D}{2} + a_1 1! \binom{D}{1} + a_0 0! \binom{D}{0})u = (D \cdot (D-1) - 7D + 15)u \,.$$

umschreiben zu

$$(D^2 - 8D + 15)u = e^t \,.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$u(t) = \frac{1}{8} e^t + c_1 e^{3t} + c_2 e^{5t} \,.$$

So erhalten wir, mit

$$x = e^t \;\text{ und }\; u(t) = y(x) \,,$$

als allgemeine Lösung unserer Eulerschen Differentialgleichung:

$$y(x) = \frac{1}{8}x + c_1x^3 + c_2x^5\,.$$

Die Anfangsbedingungen führen dann zu

$$y(x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x^5\,.$$

Bei Flüssigkeitsströmungen in Rohren mit einem Radius R, der klein gegenüber der Länge L ist, tritt, nach [6], Abschnitt 33, die inhomogene Eulersche Differentialgleichung

$$r^2v'' + rv' = -\frac{p_1 - p_2}{\eta L}r^2$$

auf. Da sich die linke Seite dieser Gleichung als

$$\frac{d}{dr}(r\frac{dv}{dr})$$

schreiben lässt, kann die Geschwindigkeitsverteilung $v(r)$ durch zweimalige Integration bestimmt werden. Damit wird auch das bekannte Hagen-Poiseuillesche Gesetz

$$V = \pi\frac{p_1 - p_2}{8\eta L}R^4T$$

hergeleitet.

3.6 Übungsaufgaben: Gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabe 1
Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme:

a) $y' + \cos x \cdot y = 0\,, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 2\pi$

b) $x(x+1)\,y' = y\,, \quad y(1) = \frac{1}{2}$

c) $y^2 y' + x^2 = 1\,, \quad y(2) = 1.$

Aufgabe 2
Lösen Sie folgende Differentialgleichungen mit Hilfe einer geeigneten Substitution:

a) $y' = (x + y + 1)^2$

b) $y \cdot y' = x + \dfrac{y^2}{x}$ mit Anfangswert $y(1) = \sqrt{2}$.

Aufgabe 3
Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme durch *Variation der Konstanten*:

a) $xy' - y = x^2 \cdot \cos x\,, \quad y(\pi) = 2\pi$

b) $y' + \tan x \cdot y = 5\sin(2x)\,, \quad y(3\pi) = 2$

c) $xy' + y = \ln x\,, \quad y(1) = 1$

d) $y' + \tan x \cdot y = \sin x \cdot \cos x\,, \quad y(0) = 1.$

Aufgabe 4
Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung folgender inhomogener Differerentialgleichungen:

a) $y' - 6y = 3e^{6x}$

b) $y' - 5y = 2\cos x - \sin(3x)$.

Aufgabe 5
Formulieren Sie die folgenden Differentialgleichungen

a) $y''' = \sin x \cdot y' + \tan x \cdot y + e^x$,

b) $y^{(4)} = 3y''' + y + 2 \sin x$,

c) $y_1'' = 3y_1 + 4y_2$, $y_2'' = 4y_1 + 7y_2$

als Differentialgleichungssystem mit höchstens ersten Ableitungen in der Form

$$y' = Ay + f .$$

Aufgabe 6
Geben Sie die allgemeinen Lösungen folgender Differerentialgleichungen an:

a)

$$y' = \frac{y}{x} \text{ in } \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} ,$$

b)

$$y' = -\frac{x}{y} \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* .$$

Aufgabe 7
Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen 2. Ordnung:

a) $y'' + y = 0$

b) $y'' + 2y' + y = 0$

c) $y'' + y' - 2y = 0$

d) $y'' - 2y' + 2y = 2$

e) $y'' + 2y' - 3y = 3x^2 - 4x$

f) $y'' + 2y' + y = -2 \sin(2x)$.

Aufgabe 8
Lösen Sie die Anfangswertprobleme:

a) $y'' - 2y' + 2y = 2\,, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$

b) $y'' + 2y' + y = -2\sin(2x)\,, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$

Aufgabe 9
Ein Atom A verbindet sich mit einem Atom B zu einem Molekül AB. Die Anzahl der Atome A zur Zeit $t = 0$ sei a, die der Atome B zur Zeit $t = 0$ sei b. Die Anzahl der Moleküle AB sei $x(t)$ und genüge der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)\,,$$

mit einer Konstanten $k \in \mathbb{R}_+^*$. Lösen Sie die Differentialgleichung für $a > b$. Wann kommt die Reaktion zum Stillstand?

Aufgabe 10
Sei

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = f(x)\,,$$

mit Störfunktionen f, wobei

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$,

b) $f(x) = 2e^x$,

c) $f(x) = \cos x$,

d) $f(x) = \sin x$,

e) $f(x) = e^{-x}$,

f) $f(x) = -x^2 e^x$,

g) $f(x) = xe^{-x}$.

Geben Sie die allgemeine Lösung für die homogene Differentialgleichung und jeweils eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung an.

Aufgabe 11
Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme:

a)

$$y'(x) + xy^2(x) = 0\,, \quad y(1) = 0 \text{ bzw. } y(1) = 1\,,$$

b)

$$y'(x) = \frac{x^2}{y(x)}\,, \quad y(x) \neq 0\,,\ y(0) = 1\,.$$

Aufgabe 12
Sei

$$mx''(t) + kx'(t) + Dx(t) = F(t)\,.$$

(i) Sei $m = 0,5\,kg$, $D = 128\,Nm^{-1}$ und $F(t) = 0$. Für welchen Wert von k tritt der aperiodische Grenzfall auf? Für welche Werte treten Schwingungslösungen auf?

(ii) Sei $m = 0,5\,kg$ und $D = 128\,Nm^{-1}$ und $F(t) = 0$. Geben Sie die Lösung für den aperiodischen Grenzfall mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0,2\,m$ und $x'(0) = 0$ an.

(iii) Sei $m = 10\,kg$, $D = 50\,Nm^{-1}$, $r = 20\,kgs^{-1}$ und

$$F(t) = 10\,N\sin(\omega t)$$

mit $\omega = 1\,s^{-1}$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe 13

a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$9y'' - 12y' + 4y = 0\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = \frac{1}{3}\,.$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x''(t) + 8x'(t) + 16x(t) = 0\,.$$

Bestimmen Sie den reellen Parameter a zu

$$x(0) = 2\,,\ x'(0) = a$$

so, dass $x(t = 1) = 0$ ist.

c) Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden inhomogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung:

(i)
$$y'' + 2y = x^2 + 2x + 4\,,$$

(ii)
$$y'' + y = x^2 + \exp(5x) + \cos(2x)\,,$$

(iii)
$$y'' + 2y' + 82y = 164 + 164\exp(-2x)\,,$$

(iv)
$$y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = 32t^2\,,\quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0\,.$$

Aufgabe 14
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt}x(t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} x(t)$$

mit

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

Aufgabe 15
Bestimmen Sie eine Differentialgleichung, die folgende allgemeine Lösung besitzt:

$$y(x) = e^{-x}(c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x)) + x^2 - e^{-x} + \cos(3x)\,,\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 16
Formulieren Sie das zugehörige System erster Ordnung zu

$$x^2y'' - 2y = x\,,\quad x > 0\,,$$

und bestimmen Sie die Lösung dieser Differentialgleichung mit den Anfangswerten $y(1) = -\frac{1}{2}$ und $y'(1) = -\frac{1}{2}$.

Aufgabe 17
Bestimmen Sie die Lösungen zu folgenden Systemen linearer Differentialgleichungen:

$$y'(t) = Ay(t)\,,$$

mit

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

e) $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 18
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\exp A$, indem Sie das Interpolationspolynom benutzen.

Aufgabe 19
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\exp A$, indem Sie die Matrix diagonalisieren.

Aufgabe 20
Bestimmen Sie, mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion, die Lösungen der Anfangswertprobleme

$$y' = Ay\,,\ y(0) = y_0\,,$$

mit

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$,

d) $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 21
Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung auf dem Intervall $(0, \infty)$ für folgende Differentialgleichungen:

a) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0\,,$

b) $xy''' + 2y'' - \dfrac{1}{x}y' + \dfrac{1}{x^2}y = 0\,.$

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ Körper der rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$ Körper der reellen Zahlen

$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$

$\mathbb{R}^* := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash \{0\}$

$\mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$

$\mathbb{C}$ Körper der komplexen Zahlen

$\mathbb{C}^* := \{z \in \mathbb{C} \,|\, z \neq 0\} = \mathbb{C} \backslash \{0\}$

Literatur

[1] C. Blatter, Analysis 3, Springer

[2] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, B. G. Teubner, Nauka

[3] A. Budó, *Theoretische Mechanik*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1987)

[4] O. Forster, *Analysis 1, 2, 3*, Vieweg

[5] S. Großmann, *Mathematischer Einführungskurs für die Physik*, B. G. Teubner

[6] H. Heuser, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, B. G. Teubner

[7] F. Reinhardt, H. Soeder, *dtv-Atlas zur Mathematik*, Deutscher Taschenbuch Verlag

[8] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer-Verlag