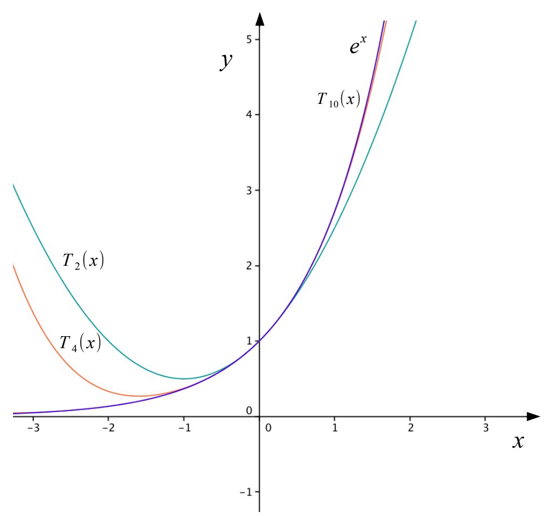
V, 1–176 (2024)

Mathematik 1 für Ingenieure

Dr. Jürgen Bolik

Technische Hochschule Nürnberg



Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen

1.1 Definitions- und Wertebereich

Seien $D, W \subset \mathbb{R}$. Eine reellwertige (reelle) *Funktion* auf D ist eine *Abbildung*

$$f : D \to W\,.$$

Dabei wird jedem $x \in D$ genau ein $y \in W$ zugeordnet. Statt $x \mapsto y$ schreiben wir auch

$$x \mapsto f(x)$$

mit $y = f(x)$.
Die Menge

- D heißt *Definitionsbereich* von f,
- W heißt *Wertebereich* von f.

Der *Graph* einer Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}$$

ist die Menge

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \,|\, y = f(x)\}\,.$$

Unter einer *Abbildung* $f \subset D \times W$ wird eine *Relation* verstanden, die

- *allen* Elementen aus D ein Element aus W zuordnet, wobei
- diese Zuordnung *eindeutig* ist.

Die Menge

$$f[T] := \{f(x) \,|\, x \in T \subset D\}$$

heißt *Bild* von T unter f.

Eine Abbildung (Funktion) $f : D \to W$ heißt

- *surjektiv*, wenn $f[D] = W$ ist.
- *injektiv*, wenn aus $f(x_1) = f(x_2)$ die Eigenschaft $x_1 = x_2$ folgt.
- *bijektiv*, wenn f surjektiv und injektiv ist.

1.2 Graphische Darstellung einer Funktion

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionen

$$f : x \mapsto x^n$$

sind in ganz $\mathbb{R}$ definiert und wir können $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schreiben.

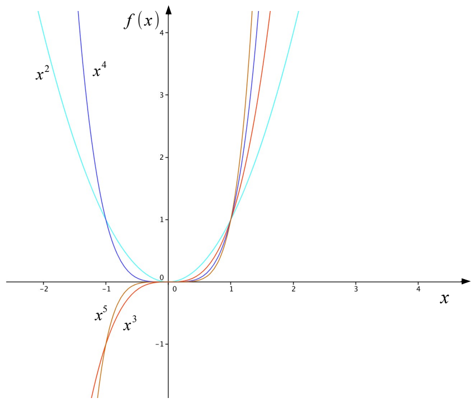


Abbildung 1.1 Die Graphen der Funktionen x^n mit $n = 2, 3, 4, 5$

Die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}$$

ist für $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ definiert und wir können $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ schreiben.

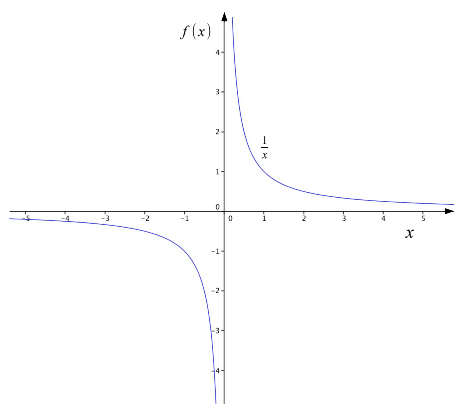


Abbildung 1.2 Der Graph von $\frac{1}{x}$

1.3 Monotonie

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $x, x' \in D$ mit $x < x'$. Dann heißt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$

- *monoton wachsend*, wenn
$$f(x) \leq f(x')\,,$$
- *streng monoton wachsend*, wenn
$$f(x) < f(x')\,,$$
- *monoton fallend*, wenn
$$f(x) \geq f(x')\,,$$
- *streng monoton fallend*, wenn
$$f(x) > f(x')\,.$$

Beispiel

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f : x \mapsto x^2$$

ist streng monoton fallend für $x \leq 0$ und streng monoton steigend für $x \geq 0$.

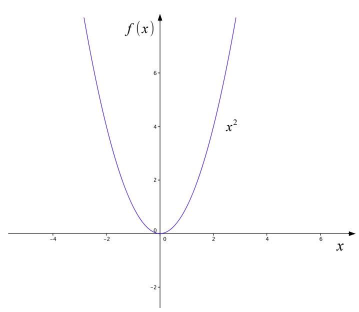


Abbildung 1.3 Der Graph der Funktion x^2

1.4 Umkehrfunktion

Seien $D, M \subset \mathbb{R}$. Ist die *Funktion*

$$f : D \to M$$

bijektiv, so existiert eine Funktion f^{-1}

$$f^{-1} : M \to D$$

mit der Eigenschaft

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y\,.$$

Diese Funktion wird als *Umkehrfunktion* bezeichnet.

Satz: Sei

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

eine stetige, streng monoton wachsende (bzw. streng monoton fallende) Funktion. Dann bildet f das Intervall $[a, b]$ bijektiv auf das Intervall $[f(a), f(b)]$ (bzw. $[f(b), f(a)]$) ab, und die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R} \ \ \text{(bzw. } [f(b), f(a)] \to \mathbb{R})$$

ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend).

Beispiele

(i) Die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$ ist streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}_+$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+$ ab. Die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \;\text{ mit }\; x \mapsto \sqrt{x}\,.$$

wird als Quadratwurzel bezeichnet.

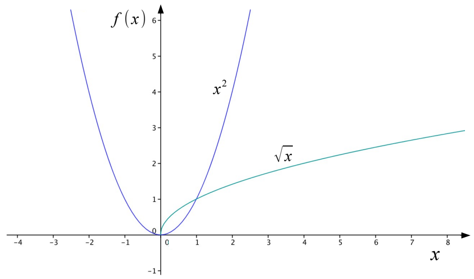


Abbildung 1.4 Die Graphen von x^2 und $\sqrt{x}$

(ii) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 2^x$ ist streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ ab. Die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \log_2(x)\,.$$

wird als dualer Logarithmus bezeichnet.

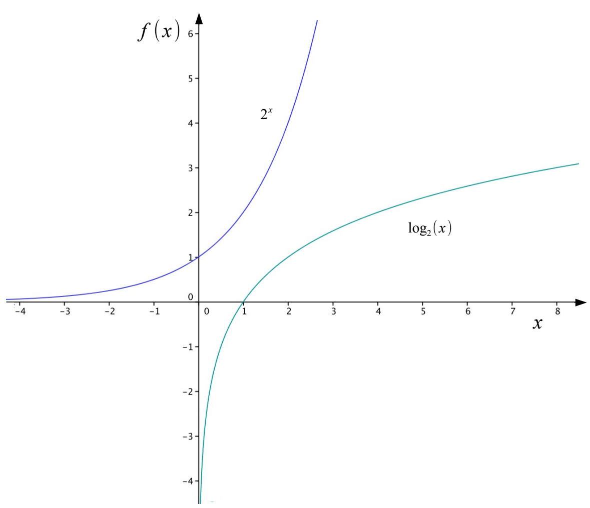


Abbildung 1.5 Die Graphen von 2^x und $\log_2(x)$

(iii) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $a \neq 1$. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto a^x$$

ist streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$. In beiden Fällen wird $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+^*$ abgebildet. Die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \log_a(x)$$

ist stetig. Diese wird als Logarithmus zur Basis a bezeichnet.

1.5 Elementare Funktionen

1.5.1 Potenzfunktionen

Unter *Potenzfunktionen mit positivem Exponenten* verstehen wir Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\; x \mapsto x^n\,,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$.

Beispiele

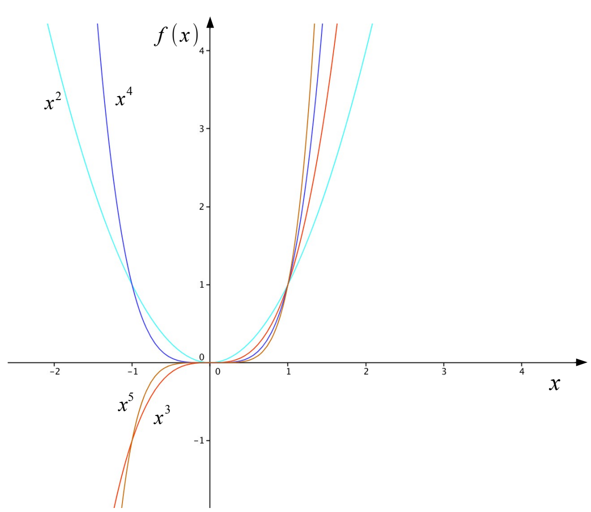


Abbildung 1.6 Die Graphen der Funktionen x^n mit $n = 2, 3, 4, 5$

Unter *Potenzfunktionen mit negativem Exponenten* verstehen wir Funktionen

$$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x^{-n}\,,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$.

Beispiele

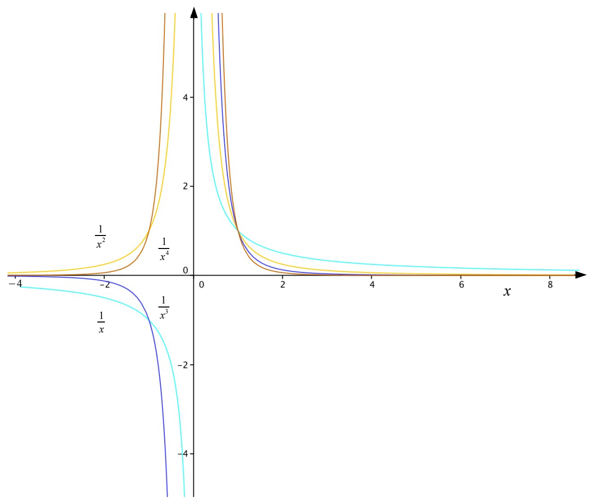


Abbildung 1.7 Die Graphen der Funktionen x^{-n} mit $n = 1, 2, 3, 4$

1.5.2 Wurzelfunktionen

Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$. Die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\,,\quad x \mapsto x^k$$

ist streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}_+$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+$ ab. Die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\,,\quad x \mapsto \sqrt[k]{x}$$

ist stetig und streng monoton wachsend. Diese wird als k-te Wurzel bezeichnet.

Ist k ungerade, so ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^k$$

stetig und bijektiv. Die k-te Wurzel ist daher für ungerade Wurzelexponenten auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Beispiel

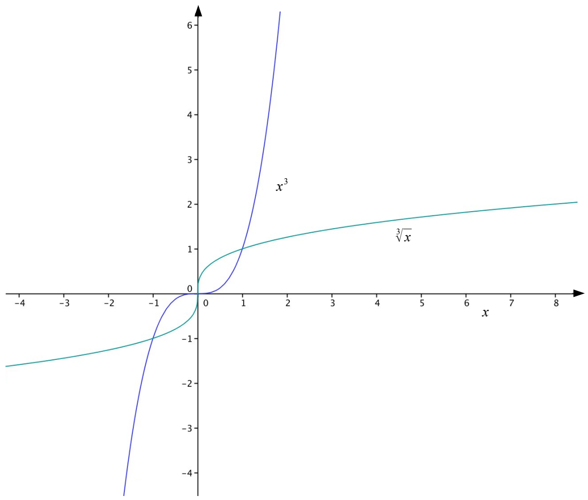


Abbildung 1.8 Die Graphen der Funktionen x^3 und $\sqrt[3]{x}$

1.5.3 Polynome

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$. Dann heißt die Funktion

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Polynom vom Grad n. Die Zahlen a_i, $i = 1, ..., n$, werden Koeffizienten genannt.

Diese Funktionen p werden auch als *ganzrationale Funktionen* bezeichnet.

Beispiele: Polynome vom Grad

- 0: konstante Funktionen
- 1: $p(x) = ax + b$, mit $a, b \in \mathbb{R}$
- 2: $p(x) = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$, mit $a, b, c \in \mathbb{R}$

1.5.4 Rationale Funktionen

Seien $m, n \in \mathbb{N}$,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

und

$$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^m \,.$$

Ferner sei $D := \{x \in \mathbb{R} \,|\, q(x) \neq 0\}$. Dann heißt die Funktion

$$r : D \to \mathbb{R},\; x \mapsto r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

rationale Funktion.

Lässt sich r nur mit Nennerpolynomen des Grades $m > 0$ darstellen, so werden die Funktionen r auch als *gebrochenrationale Funktionen* bezeichnet.

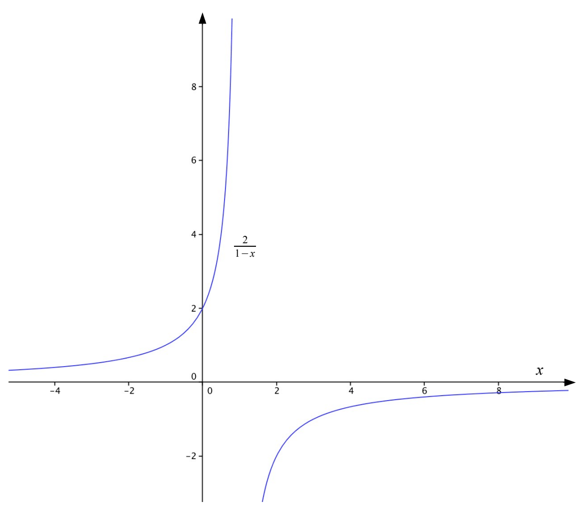


Abbildung 1.9 Die rationale Funktion $\dfrac{2}{1-x}$

Polynomdivision

Seien p und q Polynome und r eine rationale Funktion jeweils gemäß obiger Definitionen. Dann gibt es ein Polynom p_0 und ein Polynom p_r, dessen Grad kleiner als der Grad von q ist, so dass

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = p_0(x) + \frac{p_r(x)}{q(x)} \,.$$

Beispiel

Sei $p(x) = 6x^4 + 17x^3 - 13x^2 + 45x - 24$ und $q(x) = 2x^2 + 7x - 3$. Wir erhalten

$$r(x) = 3x^2 - 2x + 5 \;\; \text{Rest} \;\; 4x - 9\,.$$

1.5.5 Trigonometrische Funktionen

Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel φ zwischen Ankathete b und Hypotenuse c. Die Gegenkathete werde als a bezeichnet.

Der *Sinus* ist gegeben als Verhältnis der Längen von Gegenkathete zu Hypotenuse:

$$\sin\varphi = \frac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Hypotenuse}} = \frac{a}{c}\,.$$

Der *Cosinus* ist gegeben als Verhältnis der Längen von Ankathete zu Hypotenuse:

$$\cos\varphi = \frac{\text{Länge der Ankathete}}{\text{Länge der Hypotenuse}} = \frac{b}{c}\,.$$

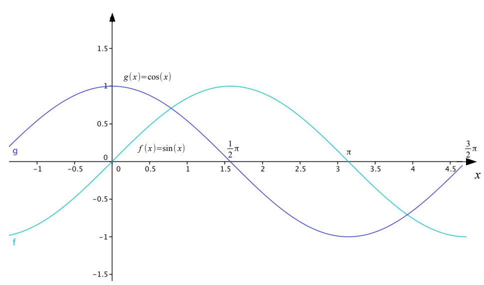


Abbildung 1.10 Die Funktionen sin und cos

Der Abbildung lässt sich entnehmen, dass

$$\sin(\varphi + \pi) = -\sin\varphi\,,$$

$$\cos(\varphi + \pi) = -\cos\varphi\,.$$

Die Periode beider Funktionen ist 2π.

Es ist auch eine praktische Darstellung unserer Winkelfunktionen mit Hilfe des Einheitskreises möglich:

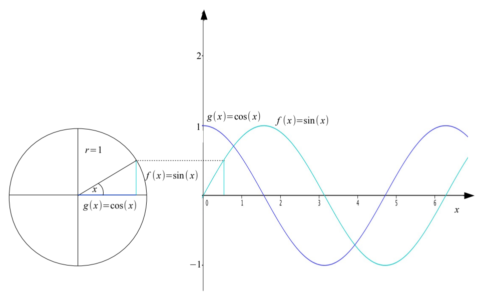


Abbildung 1.11 Die Funktionen $\sin$ und $\cos$ und der Einheitskreis

Nach dem Satz von Pythagoras folgt

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\,.$$

Außerdem gilt

$$\sin\varphi = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)$$

und

$$\cos\varphi = \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)\,.$$

Anmerkung zu Winkelmaßen

Für Winkel in Bogenmaß gilt:

$$\varphi := \frac{b}{r}$$

Ist $b = 2\pi r$, so gilt $\varphi = 2\pi$.

Somit gilt $360° = 2\pi\ rad$ und $1\ rad = \dfrac{180°}{\pi}$.

Definition des Tangens: Für $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ sei

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}\,.$$

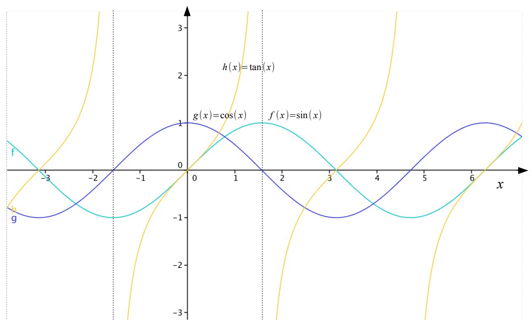


Abbildung 1.12 Die Funktionen sin und cos und $\tan$

Die Umkehrfunktionen von $\sin$, $\cos$ *und* $\tan$

Für die Umkehrfunktion $\arcsin$ von $\sin$ gilt

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\,,$$

und für die Umkehrfunktion $\arccos$ von $\cos$ gilt

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]\,.$$

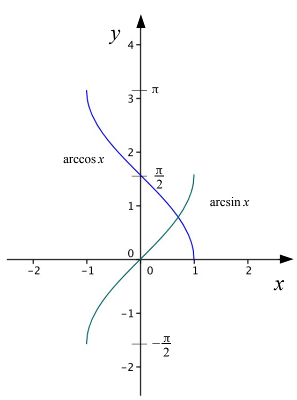


Abbildung 1.13 Die Graphen Funktionen $\arcsin$ und $\arccos$

Für die Umkehrfunktion $\arctan$ von $\tan$ gilt

$$\arctan : (-\infty, \infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \, .$$

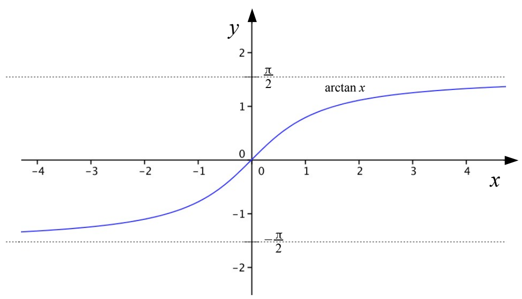


Abbildung 1.14 Der Graph der Funktion $\arctan$

1.5.6 Die Exponentialfunktion

Wir definieren die Exponentialfunktion mit Hilfe einer (absolut konvergenten) Reihe als

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \, .$$

Damit lässt sich zeigen, dass

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}$$

und mit Hilfe dieser Funktionalgleichung wiederum, dass

$$\exp(x) > 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \, ,$$

$$\exp(-x) = (\exp(x))^{-1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

und

$$exp(n) = e^n \quad \text{für } n \in \mathbb{Z} \, .$$

Definition: Sei $a \in \mathbb{R}_+^*$. Dann ist die *Exponentialfunktion zur Basis* a definiert durch

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, , \; x \mapsto \exp_a(x) := \exp(x \ln a) \, .$$

Satz: Die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig und es gilt

- die Funktionalgleichung

$$\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y) \quad \text{für alle} \quad x, y \in \mathbb{R}\,,$$

- $\exp_a(n) = a^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$,
- $\exp_a(\frac{p}{q}) = \sqrt[q]{a^p}$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 2$.

Daher ist die Bezeichnung $a^x := exp_a(x)$ sinnvoll.

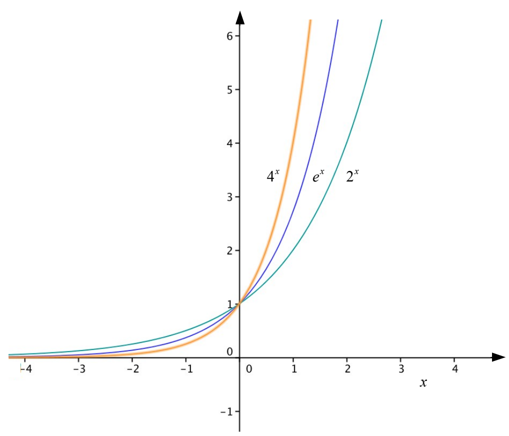


Abbildung 1.15 a^x für verschiedene Basen

1.5.7 Der Logarithmus

Die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

ist streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf

$$\mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$$

ab. Deren Umkehrfunktion

$$\ln x : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$

ist stetig und streng monoton wachsend. Sie heißt natürlicher Logarithmus.

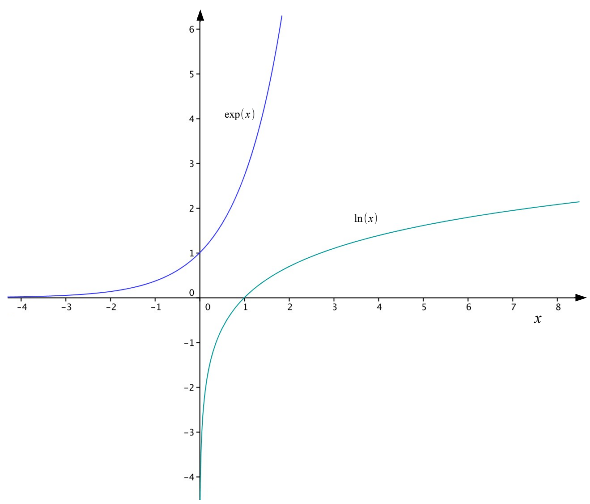


Abbildung 1.16 Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus

Es gilt die Funktionalgleichung

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}_+^* \,.$$

Logarithmen verschiedener Basen
Sei $a \in \mathbb{R}_+^*$ mit $a \neq 1$. Die Funktion $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ mit

$$f : x \mapsto \log_a x$$

ist streng monoton fallend für $0 < a < 1$ und streng monoton steigend für $a > 1$.

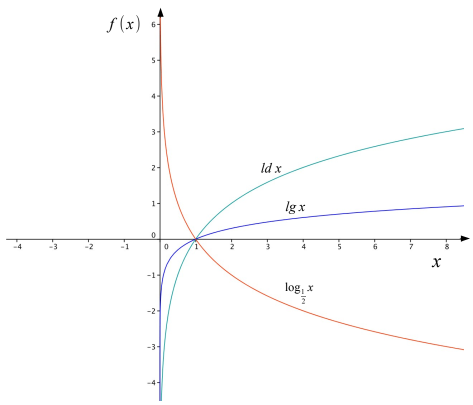


Abbildung 1.17 Die Graphen von ld x, lg x und $\log_{\frac{1}{2}} x$

Seien $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ mit $a, b \neq 1$ und $x \in \mathbb{R}_+^*$. Es gilt

$$\log_a x = \log_a(b^{\log_b x}) = \log_b x \cdot \log_a b$$

und daher

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}\ .$$

Häufig verwendete Basen a sind

- $a = 2$: dualer Logarithmus ld
- $a = e = 2,71828....$ (*Eulersche Zahl*): natürlicher Logarithmus ln
- $a = 10$: dekadischer Logarithmus lg.

Rechenregeln
Es gilt

$$\log_a a^x = x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

und

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+^*\ .$$

Sei $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ und $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)\,,$$
$$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)\,,$$
$$\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)\,.$$

1.5.8 Die Betragsfunktion

Die Betragsfunktion (in $\mathbb{R}$) ist definiert durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto |x| := \begin{cases} x & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{falls} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

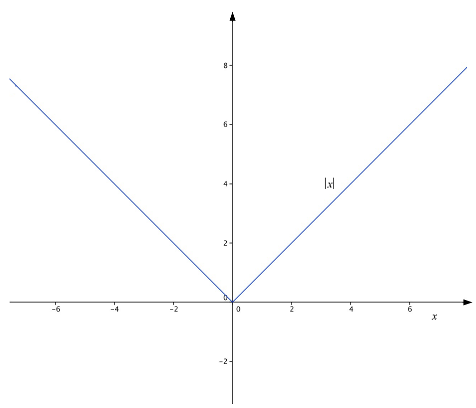


Abbildung 1.18 Der Graph von $|x|$

Rechenregeln für den Absolutbetrag

- Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt stets $|x| \geq 0$ und $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
- $|-x| = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- $|xy| = |x||y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 0$.
- Dreiecksungleichung: $|x + y| \leq |x| + |y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- $|x + y| \geq |x| - |y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

1.5.9 Die Hyperbelfunktionen

Die Funktionen *Sinus hyperbolicus* und *Cosinus hyperbolicus* sind durch

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ \sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

bzw.

$$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ \cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

definiert.

Die Hyperbelfunktionen $\sinh$ und $\cosh$ sind stetig.

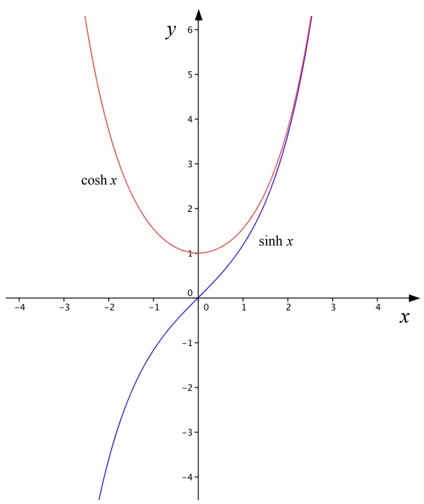


Abbildung 1.19 Die Hyperbelfunktionen $\cosh$ und $\sinh$

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y\,,$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

und

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,.$$

Die Funktion $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

definiert.

Die Umkehrfunktionen von $\sinh$, $\cosh$ und $\tanh$ heißen arsinh, arcosh bzw. artanh.

1.6 Übungsaufgaben: Funktionen

Aufgabe 1
Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $e^{-0{,}4x} = 10^{-2}$,

b) $e^x = e^{-3x+1}$.

Aufgabe 2
Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $\ln x = -10^5$,

b) $\ln \sqrt{x} + \ln \sqrt[3]{x} = 3$,

c) $\ln \sqrt{1 - x^2} = -\frac{1}{2}$.

Aufgabe 3
Es bezeichne $\mathbb{R}_+$ die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen. Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit

$$x \mapsto x^2 - x + 1$$

injektiv, surjektiv, bijektiv?

Aufgabe 4
Sei $D_f \subset \mathbb{R}$. Gegeben ist die Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = -3 + \ln(x - 2) .$$

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D_f und den Bildbereich $f[D_f]$ an.

b) Untersuchen Sie die Funktion f mit Hilfe der 1. Ableitung auf Monotonie.

c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} und geben Sie deren Definitions- und Bildbereich an.

Aufgabe 5
Bestimmen Sie die Nullstellen von

a) $\cos x$,

b) $x^4 - 4x^2 - 45$,

c) $\sin(x - \frac{\pi}{4})$.

Aufgabe 6
Untersuchen Sie auf Monotonie:

a) $|x^2 - 2x + 1|$ für $x \geq 1$,

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto e^{2x}$,

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$,

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Aufgabe 7
Eine radioaktive Substanz zerfällt nach dem Zerfallsgesetz $n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit

$$n(t) = n_0 e^{-\lambda t}\,, \quad \text{wobei } \lambda > 0\,.$$

Für Radon $^{222}_{86}$Rn gilt $\lambda = 2,0974 \cdot 10^{-6}\, s^{-1}$. Berechnen Sie die Halbwertszeit $T_{1/2}$.

Aufgabe 8
Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von

a) $\dfrac{x^3}{x^2 + 1}$,

b) $\sin x \cdot \cos x$,

c) $\dfrac{1}{x - 1}$.

Aufgabe 9
Eine gebrochenrationale Funktion f hat bei 2 eine einfache und bei -4 eine doppelte Nullstelle; sie hat Pole bei -1 und 1 und es gilt $f(0) = 4$. Sie hat keine weiteren Null- und Polstellen. Wie lautet die Abbildungsvorschrift?

Aufgabe 10
Zerlegen Sie die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{2x^5 + x^4 - 4x^3 + 2x}{2x^4 - 4x^2 + 2}$$

in eine Summe aus einem Polynom und einer echt gebrochenen rationalen Funktion. Bestimmen Sie die Asymptoten des Graphen.

Aufgabe 11
Lösen Sie folgende Ungleichungen in $\mathbb{R}$:

a) $x^2 + x - 1 \geq 0\,,$

b) $|x| \leq x - 2\,,$

c) $\dfrac{x-1}{x+1} < 1\,,$

d) $\dfrac{1}{1-x} > \dfrac{1}{1+x}\,,$

e) $-2x^2 + 14x - 20 \leq 0\,,$

f) $\dfrac{1}{x} + x \geq 2\,,\quad \text{mit } x > 0\,.$

Aufgabe 12
Berechnen Sie die Werte des Polynoms

$$q(x) = -x^3 + 5x^2 + 8x - 12$$

an den Stellen $x = -1$ und $x = 1$ und schreiben Sie das Polynom als Produkt von Linearfaktoren.

Aufgabe 13
Geben Sie für folgende Polynome die Linearfaktorzerlegung an:

a) $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6\,,$

b) $y = 2x^3 + 2x^2 - 32x + 40\,,$

c) $y = x^3 + 2x^2 - 13x + 10\,.$

Aufgabe 14

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$ in Hinblick auf den maximalen Definitionsbereich $D_f \subset \mathbb{R}$, Injektivität und Surjektivität. Geben Sie, auf geeigneten Teilmengen, die Umkehrfunktionen an:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}\,,$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}\,,$

c) $f(x) = \dfrac{2}{x}\,,$

d) $f(x) = \sin x\,,$

e) $f(x) = 2e^{-x^2}$ mit $x > 0\,,$

f) $f(x) = \ln(\dfrac{1+x}{x})$ mit $x > 0\,.$

Skizzieren Sie jeweils den Graphen von f.

2 Komplexe Zahlen

2.1 Aufbau des Zahlensystems

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen und die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen

Die Zahlen $1, 2, 3, ...$ werden als natürliche Zahlen bezeichnet.
Wir schreiben für die Menge der *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$, wobei

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\} .$$

Um auch die Zahl 0 zu berücksichtigen, schreiben wir

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\} .$$

Häufig wird auch folgende Notation verwendet:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$$

und

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\} .$$

Die Menge der *ganzen Zahlen* ist

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\} .$$

Anmerkung: Verbunden mit den ganzen Zahlen ist auch ein wichtiges Beweisprinzip, das der *vollständigen Induktion*:

Es wird eine Aussage $A(n)$ für alle ganzen Zahlen $n \geq n_0$ bewiesen, wobei auch n_0 eine ganze Zahl ist. Dabei wird gezeigt, dass

- $A(n_0)$ wahr ist (*Induktionsanfang*) und,
- falls $A(n)$ wahr ist, auch $A(n + 1)$ wahr ist, wobei n eine beliebige ganze Zahl $n \geq n_0$ ist (*Induktionsschritt*).

Beispiel: Mit Hilfe der vollständigen Induktion lässt sich beweisen, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt.

(i) *Induktionsanfang*

$$\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

(ii) *Induktionsschritt*

Es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(Induktionsvoraussetzung). Gezeigt werden soll, dass dann auch

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

gilt.

Beweis:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2} \cdot (n+2)$$

Der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen und der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen

Wir bezeichen Zahlen, die sich als Quotienten $\frac{p}{q}$ zweier Zahlen $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z}$, wobei $q \neq 0$, darstellen lassen, als *rationale Zahlen*.

Wir schreiben für die Menge der *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$, wobei

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}\,.$$

Eine rationale Zahl besitzt entweder

- eine endliche oder
- eine reinperiodische oder
- eine gemischtperiodische Dezimalbruchentwicklung.

Die Menge der *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ ist umfassender als $\mathbb{Q}$ und enthält auch irrationale Zahlen, wie beispielsweise $\sqrt{2}$.

Wir sprechen von einem Körper $\mathbb{K}$, wenn auf der Menge $\mathbb{K}$ die Verknüpfungen Addition und Multiplikationen definiert und folgende Axiome und das Distributivgesetz erfüllt sind:

Axiome der Addition

- *Assoziativgesetz*

  $$(x + y) + z = x + (y + z) \;\text{ für alle } x, y, z \in \mathbb{K}\,.$$

- *Kommutativgesetz*

  $$x + y = y + x \;\text{ für alle } x, y \in \mathbb{K}\,.$$

- *Existenz der Null*

  Es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{K}$ mit $x + 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{K}$.

- *Existenz des Negativen*

  Zu jedem $x \in \mathbb{K}$ existiert ein $-x \in \mathbb{K}$ mit $x + (-x) = 0$.

Axiome der Multiplikation

- *Assoziativgesetz*

  $$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \text{für alle } x, y, z \in \mathbb{K}\,.$$

- *Kommutativgesetz*

  $$x \cdot y = y \cdot x \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{K}\,.$$

- *Existenz der Eins*

  Es gibt eine Zahl $1 \in \mathbb{K}, 1 \neq 0,$ so dass $x \cdot 1 = x$ für alle $x \in \mathbb{K}\,.$

- *Existenz des Inversen*

  Zu jedem von 0 verschiedenen $x \in \mathbb{K}$ existiert ein $x^{-1} \in \mathbb{K}$ mit $x \cdot x^{-1} = 1\,.$

Distributivgesetz

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{für alle } x, y, z \in \mathbb{K}\,.$$

Beispielsweise sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ Körper.

Anordnungsaxiome in $\mathbb{R}$

- Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt entweder $x > 0$ oder $x = 0$ oder $x < 0$.
- Aus $x > 0$ und $y > 0$ folgt $x + y > 0$.
- Aus $x > 0$ und $y > 0$ folgt $xy > 0$.

Anmerkung: $x \geq y$ bedeutet $x > y$ oder $x = y$.

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen

Die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der geordneten Paare reeller Zahlen bildet auch dann einen Körper, wenn wir die Addition mittels

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und die Multiplikation mittels

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

definieren. Auch diese Multiplikation ist assoziativ und kommutativ.

Der Körper $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ wird als der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen bezeichnet.
Nach unserer Multiplikationsregel erhalten wir

$$(x, y) \cdot (1, 0) = (x, y)\,.$$

Daher ist $(1, 0)$ das neutrale Element der Multiplikation.

Das multiplikative inverse Element von $z = (x, y) \neq (0, 0)$ erhalten wir aus der Gleichung

$$(x, y) \cdot (u, v) = (1, 0)\,.$$

Die eindeutige Lösung dieser Gleichung ist

$$z^{-1} = (u, v) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Wir können reelle Zahlen x dabei als $(x, 0)$ schreiben. Setzen wir zusätzlich

$$i := (0, 1)\,,$$

so zeigt sich, dass

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy \text{ für } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Außerdem erhalten wir

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1\,.$$

2.2 Die Gaußsche Zahlenebene

Für den *Körper der komplexen Zahlen* können wir

$$\mathbb{C} = \{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

schreiben. Veranschaulichen lassen sich die komplexen Zahlen in der *Gaußschen Zahlenebene* (komplexen Zahlenebene):

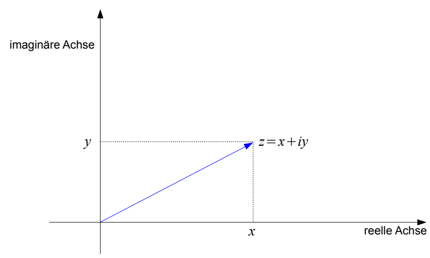


Abbildung 2.1 Darstellung einer komplexen Zahl

Die Addition zweier komplexer Zahlen entspricht der Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$:

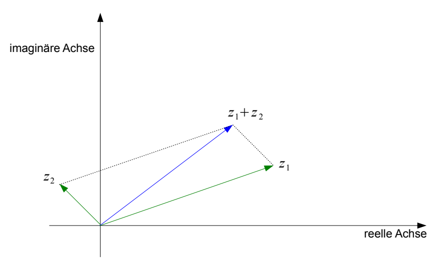


Abbildung 2.2 Addition zweier komplexer Zahlen

Ist $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so sind Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl z definiert durch

$$Re(z) := x, \quad Im(z) := y\,.$$

Zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 sind genau dann gleich, wenn

$$Re(z_1) = Re(z_2) \;\text{ und }\; Im(z_1) = Im(z_2)\,.$$

Beispiele zur Lösung quadratischer Gleichungen

- Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 = -b^2$ lauten

$$x_{1,2} = \pm ib\,.$$

- Die Gleichung $x^2 - 2x + 5 = 0$ ist äquivalent zu $(x-1)^2 = -2^2$. Daher erhalten wir als Lösung

$$x_{1,2} = 1 \pm 2i\,.$$

Die konjugiert komplexe Zahl

Die *euklidische Norm* $\|\vec{x}\| \in \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$ eines Vektors

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ist durch $\sqrt{x^2 + y^2}$ definiert.

Mit Hilfe der *konjugiert komplexen Zahl*

$$\overline{z} := x - iy\,.$$

lässt sich der Wert $x^2 + y^2$ auch als Produkt von z und $\overline{z}$ schreiben, da

$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2\,.$$

In der Gaußschen Zahlenebene wird die Konjugation einer komplexen Zahl durch Spiegelung an der reellen Achse dargestellt:

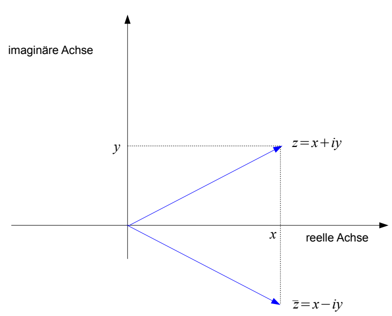


Abbildung 2.3 Die konjugiert komplexe Zahl

Ist $Im(z) = 0$, so gilt $\overline{z} = z$.

Rechenregeln für die Konjugation

Seien $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt

- $\overline{\overline{z}} = z$,
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$.

Der Betrag einer komplexen Zahl

Unter dem Betrag einer Zahl $z \in \mathbb{C}$ versteht man die Größe

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Der Betrag einer komplexen Zahl ist daher mit dem euklidischen Abstand des Punktes z vom Nullpunkt in der Gaußschen Zahlenebene identisch.

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $|\overline{z}| = |z|$.

Der Betrag einer komplexen Zahl

- Sei $z \in \mathbb{C}$. Es gilt stets $|z| \geq 0$ und $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$.
- Dreiecksungleichung: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Anmerkung: Es lässt sich auch zeigen, dass

$$|z_1 - z_2| \geq \big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

gilt.

Mit Hilfe des Betrages, können wir auch den *euklidischen Abstand* $dist(z_1, z_2)$ zweier Punkte $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ der komplexen Zahlenebene definieren:

$$dist(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|\,.$$

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ ein fester Punkt in der komplexen Zahlenebene und $r \in \mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$.

- Die Punktmenge

  $$\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| < r\}$$

  ist die Kreisscheibe (ohne Rand) mit Radius r um den Punkt z_0.

- Die Punktmenge

  $$\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| = r\}$$

  ist die Kreislinie mit Radius r um den Punkt z_0.

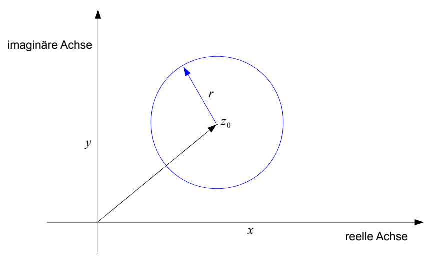


Abbildung 2.4 Eine Kreislinie in der komplexen Ebene

Die *Polarkoordinaten* $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ sind gegeben durch die kartesischen Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ mittels

$$(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)\,.$$

Dabei gilt

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Die Größe φ gibt den Winkel zwischen der positiven x-Achse und dem Strahl von 0 durch (x, y) an.

Betrachten wir statt der Ebene $\mathbb{R}^2$ die komplexe Ebene, so erhalten wir

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)\,,$$

wobei auch der Ursprung $z = 0$ zugelassen ist.

Anmerkung zu Winkelmaßen

Für Winkel in Bogenmaß gilt:

$$\varphi := \frac{b}{r}$$

Ist $b = 2\pi r$, so gilt $\varphi = 2\pi$.

Somit gilt $360° = 2\pi\ rad$ und $1\ rad = \dfrac{180°}{\pi}$.

Für $z \neq 0$ ist der Winkel φ durch die Angabe der kartesischen Koordinaten eindeutig bestimmt.

Dieser Winkel wird als Argument von z bezeichnet. Wir schreiben

$$\varphi = \arg z\,.$$

Um den Winkel φ eindeutig zu bestimmen, wird üblicherweise vorausgesetzt, dass

$$0 \leq \varphi < 2\pi \quad \text{oder} \quad -\pi < \varphi \leq \pi\,.$$

Darstellung der Multiplikation in der komplexen Zahlenebene

Sei $z, w \in \mathbb{C}^* := \{z \in \mathbb{C} \,|\, z \neq 0\} = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $\arg z = \varphi$, $\arg w = \psi$. Dann erhalten wir, mit Hilfe der Additionstheoreme (Abschnitt 2.3) der trigonometrischen Funktionen,

$$wz = |w| \cdot |z|(\cos\psi + i\sin\psi)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$= |w| \cdot |z|(\cos(\psi + \varphi) + i\sin(\psi + \varphi))\,.$$

Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen werden

- die Beträge multipliziert und
- die Argumente addiert.

Ist $w \in \mathbb{C}^*$ fest, so ist die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto wz$$

eine *Drehstreckung* und, im Falle von $|w| = 1$, eine Drehung.

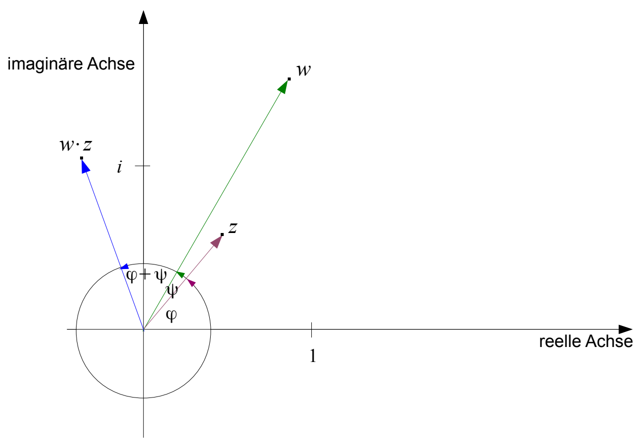


Abbildung 2.5 Multiplikation in $\mathbb{C}$

Das hinsichtlich der Multiplikation inverse Element von $z \neq 0$ ist

$$z^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x - iy) = \frac{1}{|z|^2}\overline{z} = \frac{1}{|z|}(\cos\varphi - i\sin\varphi)\,.$$

Daher gilt für die Division von $w \in \mathbb{C}^*$ durch $z \in \mathbb{C}^*$

$$\frac{w}{z} = \frac{|w|}{|z|}(\cos\psi + i\sin\psi)(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

$$= \frac{|w|}{|z|}(\cos(\psi - \varphi) + i\sin(\psi - \varphi))\,.$$

Anmerkung: Dabei verwenden wir Symmetrieeigenschaften und Additionstheoreme (Abschnitt 2.3) der trigonometrischen Funktionen $\sin$ und $\cos$, die in folgendem Abschnitt vorgestellt werden.

2.3 Die Exponentialfunktion und Trigonometrische Funktionen

Die Exponentialfunktion in $\mathbb{R}$, und analog in $\mathbb{C}$, wird mit Hilfe einer (absolut konvergenten) Reihe, der *Exponentialreihe*

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \;\; x \mapsto \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

definiert.

Damit lässt sich zeigen, dass

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \;\; \text{für}\, x, y \in \mathbb{R}$$

und mit Hilfe dieser Funktionalgleichung wiederum, dass

$$\exp(x) > 0 \;\; \text{für}\, x \in \mathbb{R}\,,$$

$$\exp(-x) = (\exp(x))^{-1} \;\; \text{für}\, x \in \mathbb{R}$$

und

$$\exp(n) = e^n \;\; \text{für}\, n \in \mathbb{Z}\,.$$

Die Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \;\; z \mapsto \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,.$$

Die Exponentialfunktion $\exp$ ist in $\mathbb{C}$ stetig.

Ferner gilt

- die Funktionalgleichung

  $$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2) \;\; \text{für alle}\; z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,,$$

- die Eigenschaft $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$
- und $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Die Definition der *Exponentialfunktion zur Basis a* lässt sich, wenn wir uns auf reelle Werte von a beschränken, sehr einfach verallgemeinern. Ist der Definitionsbereich der Funktion $\mathbb{R}$, so ist a^x folgendermaßen erklärt:.

Definition: Sei $a \in \mathbb{R}_+^*$. Dann ist die *Exponentialfunktion zur Basis* a definiert durch

$$a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto a^x := \exp(x \ln a)\,.$$

Entsprechend ist die Funktion a^z für $a \in \mathbb{R}_+^*$ auf dem Definitionsbereich $\mathbb{C}$ erklärt:

Definition: Sei $a \in \mathbb{R}_+^*$. Dann ist die *Exponentialfunktion zur Basis* a definiert durch

$$a^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ z \mapsto a^z := \exp(z \ln a)\,.$$

Anmerkung: Auf die Verallgemeinerung von a^z für $a \in \mathbb{C}^*$ wird hier verzichtet.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|e^{ix}| = 1\,,$$

da

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{\overline{ix}} = e^{ix}e^{-ix} = e^0 = 1\,.$$

Wir können daher e^{ix} als Punkt des Einheitskreises in der komplexen Ebene darstellen:

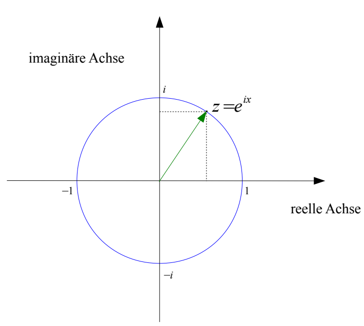


Abbildung 2.6 Die Zahl e^{ix} als Punkt am Einheitskreis

Mit Hilfe der Definition

$$\cos x := Re(e^{ix}) \text{ und } \sin x := Im(e^{ix})$$

folgt unmittelbar die *Eulersche Formel*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \, .$$

Die Variable x kann als (orientierte) Länge des Bogens e^{it}, $t \in [0, x]$ bzw. $t \in [x, 0]$, verstanden werden.

Zudem lassen sich folgende Gleichungen herleiten:

$$1 = |e^{ix}|^2 = e^{ix} \cdot \overline{e^{ix}} = e^{ix} \cdot e^{-ix} = (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x \, ,$$

$$\cos(-x) = Re(e^{-ix}) = Re(\overline{e^{ix}}) = Re(e^{ix}) = \cos x \, ,$$

$$\sin(-x) = Im(e^{-ix}) = Im(\overline{e^{ix}}) = -Im(e^{ix}) = -\sin x$$

und

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \text{ und } \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \, .$$

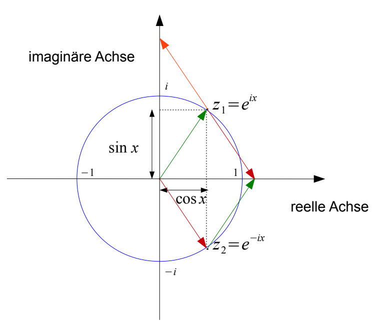


Abbildung 2.7 Die Winkelfunktionen $\cos$ und $\sin$

Mit Hilfe der Eulerschen Formel und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion erhalten wir eine einfache Herleitung folgender *Additionstheoreme* :

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \, ,$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \, .$$

Begründung: Gemäß der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion gilt

$$e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}\,,$$

und umgeformt, mittels der Eulerschen Formel,

$$\cos(x+y) + i\sin(x+y) = (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y)$$

$$= (\cos x\cos y - \sin x\sin y) + i(\sin x\cos y + \cos x\sin y)\,.$$

2.4 Die Moivresche Formel

Jede Zahl $z \in \mathbb{C}^*$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$z = |z|e^{i\varphi} = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \ \text{ mit } \varphi \in [0, 2\pi)\,.$$

Selbstverständlich können wir auch andere halboffene reelle Intervalle der Länge 2π wählen.

Schreiben wir zwei komplexe Zahlen w und z folgendermaßen in Polarkoordinaten:

$$w = |w|e^{i\psi} \ \text{ und } \ z = |z|e^{i\varphi}\,,$$

so lässt sich deren Produkt sehr einfach ausdrücken als

$$wz = |w||z|e^{i(\psi+\varphi)}\,.$$

Demnach und nach der Funktionalgleichung gilt

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} \ \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\,.$$

So erhalten wir die *Moivresche Formel*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) \ \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\,.$$

Damit lässt sich z^n folgendermaßen schreiben:

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))\,.$$

Die Formel von Abraham de Moivre gestattet eine einfache Herleitung der Darstellung von $\cos(n\varphi)$ und $\sin(n\varphi)$, mit $n \geq 1$, als Polynom in $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$, indem Real- und Imaginärteil getrennt betrachtet werden.

Beispielsweise erhalten wir

$$\cos(3\varphi) = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$$

und

$$\sin(3\varphi) = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\,.$$

Der Term

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n \ \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

lässt sich auch allgemein mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes umformen.

Der Binomische Lehrsatz und Binomialkoeffizienten

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $n!$ (*n Fakultät*) folgendermaßen:

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n \,.$$

Zusätzlich sei

$$0! := 1 \,.$$

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$, wobei $n \geq k$, ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$
(gesprochen n *über* k) folgendermaßen definiert:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k} \,.$$

Ist $n < k$, so setzen wir $\binom{n}{k} := 0$.

Beispiel: Die Anzahl 6-elementiger Teilmengen einer Menge von 49 Elementen beträgt

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\,983\,816 \,.$$

Binomischer Lehrsatz: Sei $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \,.$$

Demnach gilt beispielsweise

$$(x+y)^0 = 1 \,,$$

$$(x+y)^1 = x + y \,,$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \,,$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

und

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \,.$$

Die jeweiligen Koeffizienten lassen sich in dem sog. *Pascalschen Dreieck* anordnen:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\cdot & & & & & & & & & & \cdot \\
\cdot & & & & & & & & & & \cdot \\
\cdot & & & & & & & & & & \cdot
\end{array}
$$

Wie aus der Gleichung

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

hervorgeht, ist jede Zahl im Inneren des Dreiecks die Summe der beiden unmittelbar über ihr stehenden Zahlen.
Nach dem Binomischen Lehrsatz erhalten wir

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \sum_{k=0}^{n} i^k \binom{n}{k} \cos^{n-k}\varphi \cdot \sin^k\varphi \;\; \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Mit der Formel von Moivre folgt, durch Vergleich der Realteile:

$$\cos(n\varphi) = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi \cdot \sin^2\varphi$$

$$+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi \cdot \sin^4\varphi - \binom{n}{6}\cos^{n-6}\varphi \cdot \sin^6\varphi + \ldots\,.$$

Entsprechend folgt, durch Vergleich der Imaginärteile:

$$\sin(n\varphi) = n\cos^{n-1}\varphi \cdot \sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi \cdot \sin^3\varphi$$

$$+\binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi \cdot \sin^5\varphi - \binom{n}{7}\cos^{n-7}\varphi \cdot \sin^7\varphi + \ldots\,.$$

Beispiel

Nach dieser Regel erhalten wir wieder

$$\cos(3\varphi) = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$$

und

$$\sin(3\varphi) = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\,.$$

2.5 Die Wurzelfunktion

n-te Einheitswurzeln: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Dann hat die Gleichung

$$z^n = 1$$

genau n Lösungen in $\mathbb{C}$. Diese sind

$$\zeta_k := \zeta_{(n)}^k = \exp(i\frac{2k\pi}{n}) \text{ mit } k = 0, 1, ..., n-1 .$$

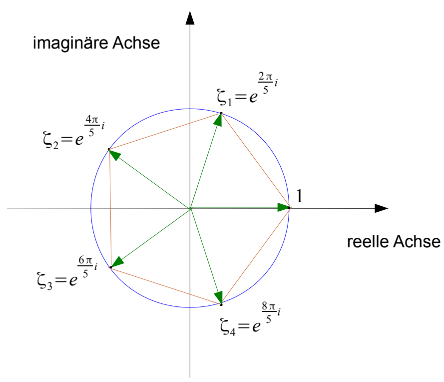


Abbildung 2.8 Die fünften Eineitswurzeln

Sei $z \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}^*$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Unter diesen Voraussetzungen suchen wir Lösungen der Gleichung

$$z^n = a .$$

Ist $a = 1$ und

$$\zeta_{(n)} := \exp(i\frac{2\pi}{n}) ,$$

so sind die n-ten Wurzeln von a die Zahlen

$$1, \zeta_{(n)}, ..., \zeta_{(n)}^{n-1} ,$$

wie oben beschrieben wurde.

Betrachten wir nun den allgemeinen Fall mit $a = |a|e^{i\varphi}$. Dann lassen sich die *n-ten Wurzeln* ζ_k von z folgendermaßen schreiben:

$$\zeta_k = \sqrt[n]{|a|} \exp(\frac{i}{n}(\varphi + 2k\pi)) \text{ mit } k = 0, 1, ..., n-1 .$$

Sei $z \in \mathbb{C}$, $p, q \in \mathbb{R}$ und die Diskriminante $D = (\frac{p}{2})^2 - q < 0$. Dann sind die Lösungen der quadratische Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0$$

gegeben durch

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{|D|}i \, .$$

Das quadratische Polynom

$$p(z) = z^2 + pz + q$$

hat daher keine Nullstellen in $\mathbb{R}$, jedoch zwei Nullstellen in $\mathbb{C}$. In $\mathbb{C}$ lässt sich das Polynom $p(z)$ als Produkt von Linearfaktoren darstellen:

$$p(z) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \, .$$

Anmerkung: Ist $p = 0$, so können wir die Nullstellen des Polynoms unmittelbar, mit obiger Formel für die Wurzelberechnung, angeben.

2.6 Der Fundamentalsatz der Algebra

Die Gleichung

$$z^n - a = 0\,, \quad \text{mit } z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{C}^*,$$

lässt sich auch als Aufgabe, die Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^n - a$$

zu finden, verstehen.

Beispielsweise erhalten wir die Nullstellen ζ_k, $k = 0, 1, 2, 3$, von

$$z^4 + 4 = 0$$

mittels

$$\zeta_k = \sqrt{2}\,\exp(\frac{i}{4}(\pi + 2k\pi))\,, \quad k = 0, 1, 2, 3\,.$$

Für

$$\zeta_0 = 1 + i\,,\ \zeta_1 = -1 + i\,, \zeta_2 = -1 - i\,, \zeta_3 = 1 - i$$

gilt

$$z^4 + 4 = (z - \zeta_0)(z - \zeta_1)(z - \zeta_2)(z - \zeta_3)\,,$$

wobei

$$\zeta_3 = \overline{\zeta_0}\,,\ \zeta_2 = \overline{\zeta_1}\,.$$

Die Terme

$$(z - \zeta_0)(z - \zeta_3) = z^2 - 2z + 2$$

und

$$(z - \zeta_1)(z - \zeta_2) = z^2 + 2z + 2$$

lassen sich in $\mathbb{R}$ nicht faktorisieren.

Um quadratische Polynome in Linearfaktoren zu zerlegen, gibt es einfache Verfahren. Nun stellt sich die Frage, ob sich Polynome auch allgemein in Linearfaktoren zerlegen lassen, wenn der Zahlenkörper $\mathbb{C}$ vorausgesetzt wird.

Allgemein sind Polynome in $\mathbb{C}$ folgendermaßen definiert:

Sei $a_m \in \mathbb{C}$, $m = 0, 1, ..., n$, und $a_n \neq 0$. Dann ist

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$$

ein Polynom vom Grade n.

Wir schreiben

- $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, wenn die Koeffizienten des Polynoms p komplexe Zahlen und
- $p(z) \in \mathbb{R}[z]$, wenn die Koeffizienten des Polynoms p reelle Zahlen sind.

Ein Polynom $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ heißt komplexes Polynom und ein Polynom $p(z) \in \mathbb{R}[z]$ reelles Polynom.

Sei $p_m(z) \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom des Grades $m \in \mathbb{N}$ und $z, z_1 \in \mathbb{C}$ mit $z \neq z_1$. Dann ist der Rest der Division von $p_n(z)$ durch $(z - z_1)$ gleich $p_n(z_1)$, d. h.:

$$p_n(z) = (z - z_1) p_{n-1}(z) + p_n(z_1)\,.$$

Ist $p_n(z)$ ohne Rest durch $(z - z_1)^k$, jedoch nicht durch $(z - z_1)^{k+1}$ teilbar, so ist z_1 eine *k-fache Nullstelle* des Polynoms $p_n(z)$.

Fundamentalsatz der Algebra: Jedes nicht-konstante komplexe Polynom hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Faktorisierungssatz: Das Polynom

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n,$$

mit $a_m \in \mathbb{C}, m = 0, 1, ..., n$ und $a_n \neq 0$,

lässt sich eindeutig (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) als Produkt

$$p(z) = a_n (z - z_1)^{m_1} \cdot (z - z_2)^{m_2} \cdot ... \cdot (z - z_r)^{m_r}$$

schreiben. Dabei sind $z_1, ..., z_r \in \mathbb{C}$ paarweise verschiedene Nullstellen, deren jeweilige Vielfachheit $m_1, m_2, ..., m_r \in \mathbb{N}$ und $m_1 + m_2 + ... + m_r = n$.

Das Polynom $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ zerfällt also vollständig in Linearfaktoren.
Für Polynome $p(z) \in \mathbb{R}[z]$ gilt

$$\overline{p(z)} = p(\overline{z}).$$

Daher ist mit jeder Nullstelle z_l auch $\overline{z_l}$ eine Nullstelle.
Ferner ist

$$(z - z_l)(z - \overline{z_l})$$

ein reelles quadratisches Polynom.

Daraus folgt, dass sich jedes Polynom $p(z) \in \mathbb{R}[z]$ vom Grade $n \geq 1$, eindeutig (bis auf die Reihenfolge) als Produkt reeller Linearfaktoren und reeller quadratischer Polynome darstellen lässt.

Das Horner-Schema

Ein Polynom der Form

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k} = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$$

lässt sich auch folgendermaßen schreiben

$$p(z) = ((...((a_0 z + a_1)z + a_2)z + ...)z + a_{n-1})z + a_n \,.$$

Mittels

$$c_0 := a_0$$

und

$$c_i := c_{i-1} z + a_i \ \text{ für } i = 1, ..., n$$

steht uns ein iteratives Verfahren, mit $c_n = p(z)$, zur Berechnung von Polynomwerten zu Verfügung, das weniger Rechenschritte benötigt als die Berechnung nach der ursprünglichen Polynomdarstellung. Legen wir folgende Schreibweise des Polynoms zugrunde

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z^1 + a_0 \,,$$

so setzen wir

$$c_n := a_n$$

und

$$c_{i-1} := a_{i-1} + b_{i-1} \text{ für } i = n, n-1, ..., 1 \,,$$

wobei

$$b_{i-1} := c_i \cdot z \text{ für } i = n, n-1, ..., 1 \,.$$

Weiterhin gilt

$$c_0 = p(z) \,.$$

Dieses iterative Verfahren zur Bestimmung von $p(z)$ für einen festen Wert $z = z_0$ lässt sich auch in Form einer Tabelle darstellen:

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_0
$0 = b_n$	b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_0
$c_n = a_n$	c_{n-1}	c_{n-2}	...	$c_0 = p(z_0)$

Ein Polynom $p_n(z)$ lässt sich folgendermaßen schreiben:

$$p_n(z) = (z - z_0) p_{n-1}(z) + p_n(z_0) \,.$$

Die Werte $p_n(z_0)$ und die Koeffizienten des Polynoms p_{n-1} stehen in der dritten Zeile des Horner-Schemas zur Berechnung von $p(z_0)$.

Beispiel: Berechnung von $p(-2)$ für

$$p(x) = x^4 - 2x^3 - 67x^2 + 8x + 252 \,.$$

Horner-Schema

1	-2	-67	8	252
0	-2	8	118	-252
1	-4	-59	126	$0 = p(-2)$

Außerdem erhalten wir

$$p(x) = x^4 - 2x^3 - 67x^2 + 8x + 252 = (x+2) \cdot (x^3 - 4x^2 - 59x + 126)\,.$$

Erweitertes Horner-Schema

Sei $x, x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x \neq x_0$. Der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\frac{p_n(x) - p_n(x_0)}{x - x_0} = p_{n-1}(x)$$

für $x \to x_0$ existiert. Daher ist p_n im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt

$$p_n'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{p_n(x) - p_n(x_0)}{x - x_0} = p_{n-1}(x_0)\,.$$

Berechnung von $p(-2)$ und $p'(-2)$ für

$$p(x) = x^4 - 2x^3 - 67x^2 + 8x + 252\,.$$

Wir erhalten

$$\frac{p(x) - p(-2)}{x+2} = x^3 - 4x^2 - 59x + 126\,.$$

Erweitertes Horner-Schema

1	-2	-67	8	252
0	-2	8	118	-252
1	-4	-59	126	0
0	-2	12	94	
1	-6	-47	220	

Daher gilt

$$p(-2) = 0 \;\text{ und }\; p'(-2) = 220\,.$$

Polynomdivision mit Hilfe des Horner-Schemas

Sind die Nullstellen bekannt, so lassen sich die Koeffizenten der auftretenden Polynome dem Horner-Schema entnehmen.

Beispiel: Das Polynom

$$p(x) = x^4 - 2x^3 - 67x^2 + 8x + 252$$

hat Nullstellen in

$$x_1 = -2, x_2 = 9, x_3 = -7 \,\text{und}\, x_4 = 2\,.$$

Wir erhalten

$x_1 = -2$	1	-2	-67	8	252
	0	-2	8	118	-252
$x_2 = 9$	1	-4	-59	126	0
	0	9	45	-126	
$x_3 = -7$	1	5	-14	0	
	0	-7	14		
$x_4 = 2$	1	-2	0		
	0	2			
	1	0			

Demnach gilt

$$p(x) = x^4 - 2x^3 - 67x^2 + 8x + 252 = (x+2) \cdot (x^3 - 4x^2 - 59x - 126)$$

$$= (x+2) \cdot (x-9) \cdot (x^2 + 5x - 14)$$

$$= (x+2) \cdot (x-9) \cdot (x+7) \cdot (x-2)\,.$$

2.7 Anwendungen

2.7.1 Komplexe Darstellung harmonischer Schwingungen

Harmonische Schwingungen genügen der Differentialgleichung

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0\,.$$

Die allgemeine Lösung unserer Bewegungsgleichung hat folgende Form:

$$x(t) = c_1 \cdot \sin(\omega t) + c_2 \cdot \cos(\omega t)\,.$$

Andere Darstellungen der allgemeinen Lösung lauten

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \alpha_0)$$

und

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)\,.$$

In der Ortsfunktion $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$ bezeichnet

- $A \in \mathbb{R}_+$ die *Amplitude*, d. h. die maximale Auslenkung aus der Ruhelage, und
- φ_0 den Nullphasenwinkel.

Die Ortsfunktion lässt sich als Realteil von

$$z(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi_0)} =: z_0 e^{i\omega t}$$

darstellen. Die Amplitude

$$z_0 = Ae^{i\varphi_0}$$

ist hierbei komplex.

Es ist auch eine praktische Darstellung von $\cos$ und $\sin$ mit Hilfe des Einheitskreises möglich:

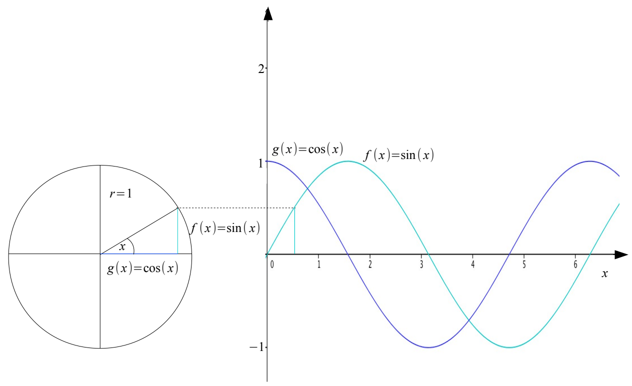


Abbildung 2.9 Die Funktionen $\sin$ und $\cos$ und der Einheitskreis

Entsprechend können wir $e^{i\omega t+\varphi_0}$ als Punkt des Einheitskreises in der komplexen Ebene darstellen:

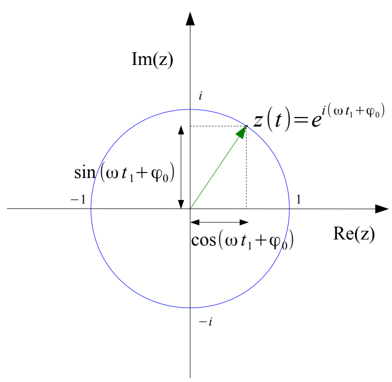


Abbildung 2.10 Die Funktion $e^{i(\omega t+\varphi_0)}$ und der Einheitskreis

2.7.2 Addition harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz

Gegeben seien zwei harmonische Schwingungen gleicher Richtung und gleicher Frequenz:

$$y_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$$

und

$$y_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2)\,.$$

Die Resultierende beider Schwingungen ist gegeben durch

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = (A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2)\sin(\omega t) + (A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2)\cos(\omega t)\,.$$

Wir suchen zwei Konstanten A und α, so dass

$$A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2 = A\cos\alpha \quad \text{und} \quad A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2 = A\sin\alpha\,.$$

Diese sind gegeben durch

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

und

$$\tan\alpha = \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}\,.$$

Damit können wir $y(t)$ auch folgendermaßen schreiben:

$$y(t) = A\cos\alpha\sin(\omega t) + A\sin\alpha\cos(\omega t) = A\sin(\omega t + \alpha)\,.$$

Andererseits lassen sich die beiden Gleichungen zur Bestimmung von A und α auch zu einer Gleichung in $\mathbb{C}$ zusammenfassen:

$$A_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) + A_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) = A(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Mit Hilfe der *Eulerschen Formel*

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

erhalten wir

$$A_1e^{i\alpha_1} + A_2e^{i\alpha_2} = Ae^{i\alpha} =: z_0\,.$$

Setzen wir

$$z_{0,1} = A_1 e^{i\alpha_1} \quad \text{und} \quad z_{0,2} = A_2 e^{i\alpha_2} \,,$$

so nimmt die vorangegangene Gleichung die einfache Form

$$z_{0,1} + z_{0,2} = z_0$$

an.

Die Addition zweier komplexer Zahlen lässt sich auch in einem Zeigerdiagramm veranschaulichen:

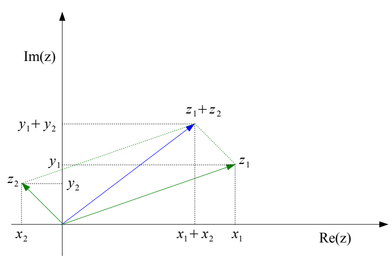


Abbildung 2.11 Zeigerdiagramm und Addition komplexer Zahlen

Die Addition sinusförmiger Schwingungen verschiedener Amplitude und Phase, aber gleicher Frequenz lässt sich mit Hilfe von Zeigerdarstellungen sehr einfach durchführen:

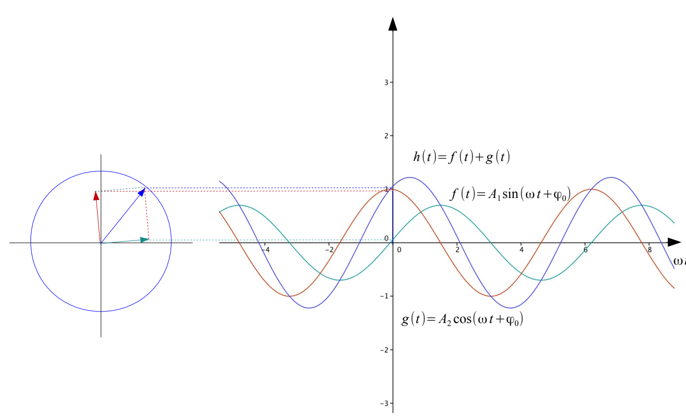


Abbildung 2.12 Addition sinusförmiger Schwingungen, Teil I

Wie das folgende Diagramm zeigt, ist die Amplitude der resultierenden Schwingung nicht notwendigerweise größer als die der einzelnen Schwingungen.

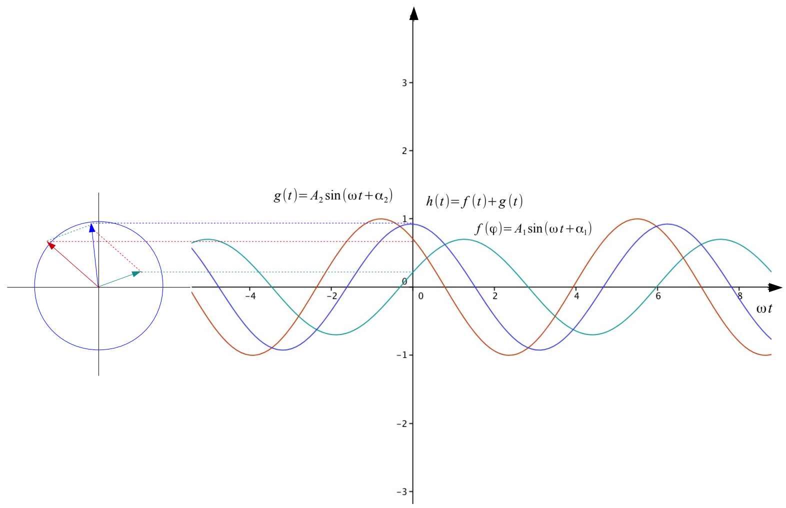


Abbildung 2.13 Addition sinusförmiger Schwingungen, Teil II

Die Funktion

$$z(t) = Ae^{i(\omega t+\alpha)} = z_0 e^{i\omega t}$$

genügt der Differentialgleichung

$$z''(t) + \omega^2 z(t) = 0\,.$$

Sowohl deren Real- als auch deren Imaginärteil repräsentieren harmonische Schwingungen. Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} y(t) &= Im(z(t)) = Im(z_0 e^{i\omega t}) = A \cdot Im(e^{i\alpha} e^{i\omega t}) = A \cdot Im(e^{i(\omega t+\alpha)}) \\ &= A \sin(\omega t + \alpha)\,. \end{aligned}$$

Beispiel: Die Funktion

$$y(t) = \sin(\omega t) + \cos(\omega t)$$

lässt sich mit Hilfe des Additionstheorems

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

umformen zu

$$y(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)\,,$$

wobei $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ und $A = \sqrt{2}$ sind.

Andererseits können wir A und φ_0 auch mittels $z(t) \in \mathbb{C}$ bestimmen. Hierzu betrachten wir die Funktionen

$$z_1(t) = e^{i\omega t}\,, \quad z_2(t) = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\omega t}$$

und deren Summe

$$z(t) = z_1(t) + z_2(t) = z_0 e^{i\omega t}\,.$$

Die komplexe Amplitude z_0 lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$z_0 = 1 + e^{i\frac{\pi}{2}} = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\,.$$

Hieraus folgt

$$A = \sqrt{2}\,,\ \varphi = \frac{\pi}{4}$$

und

$$y(t) = \sin(\omega t) + \cos(\omega t) = \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{4})\,.$$

2.8 Übungaufgaben: Komplexe Zahlen

Aufgabe 1
Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = x + iy$ an:

a) $z = (3 + 2i) + (5 - 7i)$, b) $z = (3 - i)(5 - 7i)$, c) $z = (\sqrt{3} + i)(-3 + \sqrt{3}\,i)$,

d) $z = (\sqrt{2} - 2i)^2$, e) $z = \sqrt{-4}$, f) $z = \overline{7 + 2i}$,

g) $z = \overline{(3 + 2i)(5 - 7i)}$, h) $z = \dfrac{5 - 10i}{3 + 4i}$, i) $z = \dfrac{-2 - 5i}{8 - 6i}$,

j) $z = \dfrac{1}{3 + 4i}$.

Aufgabe 2
Sei

$$z_1 = -4i\,,\ z_2 = 3 - 2i\,,\ z_3 = -1 + i\,.$$

Berechnen Sie

a) $z_1 - 2z_2 + 3z_3\,,$

b) $2z_1 \cdot \overline{z_2}\,,$

c) $\dfrac{\overline{z_1} \cdot z_2}{z_3}\,.$

Aufgabe 3
Stellen Sie folgende komplexe Zahlen z in der Form $x + iy$, mit $x,\ y \in \mathbb{R}$, dar und skizzieren sie diese jeweils:

a) $\dfrac{1}{5 - 4i}$,

b) $\dfrac{1 - i}{1 + i}$,

c) $\dfrac{1}{(1 - i)^2}$.

Aufgabe 4
Berechnen Sie die Polarkoordinaten der folgenden komplexen Zahlen und stellen Sie diese komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene dar:

a) $4 - i$, b) $-3 - 2i$, c) $-5 + 4i$,

d) $3i$, e) $-\sqrt{3}$, f) $-1 - \sqrt{8}\,i$,

g) $\overline{-3 + 4i}$, h) $i(3 + i)$, i) $\dfrac{3 - i}{-i}$,

j) $\dfrac{1}{3 + 4i}$, k) $\dfrac{1}{1 + i}$, l) $\dfrac{1 + i}{1 - i}$,

m) $\dfrac{1 - i}{1 + i}$, n) $(1 + i)^4$.

Aufgabe 5
Stellen Sie die komplexen Zahlen z mit folgenden Eigenschaften in der Form $z = x + iy$, mit $x,\, y \in \mathbb{R}$, dar:

a) $|z| = 2,\ \arg(z) = \pi$,

b) $|z| = \sqrt{2},\ \arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$,

c) $|z| = 4,\ \arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$.

Aufgabe 6
Skizzieren Sie folgende Punktmengen:

a) $\{z \in \mathbb{C}\,|\, 0 < Re(z) < 2\}$, b) $\{z \in \mathbb{C}\,|\, Im(z) = Re(z)\}$,

c) $\{z \in \mathbb{C}\,|\, |z| < 2\}$, d) $\{z \in \mathbb{C}\,|\, \arg(z) = \frac{\pi}{3}\}$,

e) $\{z \in \mathbb{C}\,|\, \frac{\pi}{3} < \arg(z) < \pi\}$, f) $\{z \in \mathbb{C}\,|\, \frac{\pi}{3} < \arg(z) < \pi,\, |z| = 1\}$,

g) $\{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\,|\, \dfrac{z}{\bar{z}} = 1\}$, h) $\{z \in \mathbb{C}\,|\, z \cdot \bar{z} \geq 4\}$.

Aufgabe 7
Berechnen Sie folgende Potenzen:

a) i^{2007}, b) $(\dfrac{1}{2}\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\,i)^{1000}$, c) $(-1 + \sqrt{3}\,i)^{12}$,

d) $(\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}(1 - i))^{25}$, e) $(\dfrac{1}{2}\sqrt{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\,i)^{1000}$, f) $(-1 - \sqrt{3}\,i)^{12}$.

Aufgabe 8
Bestimmen Sie alle Lösungen von

$$z^4 = 8\sqrt{2}(1+i)$$

in $\mathbb{C}$ und skizzieren Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene.

Aufgabe 9
Bestimmen Sie Realteil und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen z und skizzieren Sie z in der Gaußschen Zahlenebene:

a) $\sqrt{i}$, b) $\sqrt[4]{1+i}$, c) $\sqrt[5]{-32}$,

d) $\sqrt[4]{3+\sqrt{27}\,i}$, e) $\sqrt[5]{16(1+\sqrt{3}\,i)}$, f) $\sqrt[8]{1}$,

g) $\sqrt[4]{-3+\sqrt{27}\,i}$, h) $\sqrt[5]{16(-1-\sqrt{3}\,i)}$.

Aufgabe 10
Für welche Parameterwerte $t \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung

$$3x^2 + 6tx - 3t + 18 = 0$$

keine reellen Lösungen?

Aufgabe 11
Berechnen Sie

a) $(\frac{2}{\sqrt{3}+i})^{32}$,

b) $\mathrm{Im}(\frac{1}{(1+i)^3})$,

c) $\mathrm{Re}(\frac{1+2i}{4-(2+i)^2})$,

d) $|e^{iz}|$ mit $z = 6e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Aufgabe 12
Bestimmen Sie den Realteil und den Imaginärteil der komplexen Zahl

$$z = \frac{(1+\sqrt{3}\cdot i)^{11}}{(i\cdot(1+i)^2)^8}.$$

Aufgabe 13
Berechnen Sie in $\mathbb{C}$ alle Lösungen der Gleichungen

a) $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0\,,$

b) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0\,,$

c) $3x^2 + px + 3 = 0\,.$

Geben Sie für c) die Parameterwerte für $p \in \mathbb{R}$, die zu nicht-reellen Lösungen führen, an und bestimmen Sie die Lösung für $p = 5$.

Aufgabe 14

a) Geben Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L} \subset \mathbb{C}$ folgender Gleichung an:

$$\frac{17 + 19i}{z - 2i} + \frac{65 - 5i}{z + 2i} = \frac{64z + 28i}{z^2 + 4}\,.$$

b) Geben Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}$ folgender Gleichung an:

$$\frac{\sqrt{1+x} + i\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - i\sqrt{1-x}} - \frac{\sqrt{1-x} + i\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} - i\sqrt{1+x}} = 1 \quad \text{mit } x \in \mathbb{R} \text{ und } -1 \leq x \leq 1\,.$$

Aufgabe 15
Berechnen Sie die Werte des Polynoms

$$q(x) = -x^3 + 5x^2 + 8x - 12$$

an den Stellen $x = -1$ und $x = 1$ mit Hilfe des Horner-Schemas und schreiben Sie das Polynom als Produkt von Linearfaktoren.

Aufgabe 16
Bestimmen Sie das Polynom fünften Grades mit reellen Koeffizienten,

$$p(z) = a_5 z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0\,,$$

welches eine doppelte Nullstellen bei $z = -2$, einfache Nullstellen bei $z = 2$ und $z = 3 + 2i$ besitzt und der Bedingung $p(3) = 3$ genügt.

Aufgabe 17
Stellen Sie die Summe folgender harmonischer Schwingungen $u_i(t)$ in der Form

$$u(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

dar.

a) Gegeben sei

$$u_1(t) = \sin(\pi t)\,,\ u_2(t) = 2\sin(\pi t + \frac{5\pi}{6})\,.$$

b) Gegeben sei

$$u_1(t) = \sin t\,,\ u_2(t) = -\cos t\,.$$

Aufgabe 18
Gegeben sind die Schwingungen

$$u_1(t) = 3\cos(2t)\,,\ u_2(t) = \sqrt{3}\sin(2t + \frac{\pi}{6})\,,\ u_3(t) = \sqrt{3}\sin(2t + \frac{11}{6}\pi)\,.$$

Berechnen Sie die Überlagerung $u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$ mit Hilfe komplexer Rechnung und geben Sie Ihr Ergebnis in der folgenden Form an:

$$u(t) = A\sin(\omega t + \varphi)\,,$$

wobei $A > 0$, ω und φ explizit anzugeben sind.

Aufgabe 19
Geben Sie die folgende Überlagerung von Schwingungen als Cosinusfunktion an:

$$u(t) = \cos(\omega t) - 2\cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) + \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})\,.$$

Aufgabe 20
Bestimmen Sie folgende Punktmengen und skizzieren Sie diese:

a) $\{z \in \mathbb{C}\,|\,|z - i| = |z + i|\}$,

b) $\{z \in \mathbb{C}\,|\,|z - i| = 2|z + i|\}$.

3 Lineare Algebra

In diesem Abschnitt befassen wir uns vorwiegend mit der Lösung linearer Gleichungssysteme.

3.1 Vektoren

Werden Vektoren auf eine geometrische Art vorgestellt, so geschieht dies zumeist mittels der Vektoraddition und der Multiplikation mit einer Zahl (skalare Multiplikation).

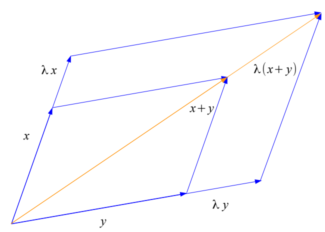


Abbildung 3.1 Vektoraddition und skalare Multiplikation

Mit $\mathbb{K}$ bezeichnen wir hier die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Ein Vektorraum V über dem Körper $\mathbb{K}$ wird definiert durch folgende Bedingungen:

1. $(x+y)+z = x+(y+z)$ für alle $x, y, z \in V$
2. $x+y = y+x$ für alle $x, y \in V$
3. Es gibt ein Element $0 \in V$, so dass

   $$x + 0 = x \quad \text{für alle } x \in V$$

4. Zu jedem $x \in V$ gibt es ein Element $-x \in V$ mit

   $$x + (-x) = 0$$

5. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $x \in V$
6. $1x = x$ für alle $x \in V$
7. $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in V$
8. $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $x \in V$.

Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$

Ist auf einem reellen Vektorraum V ein *inneres Produkt* oder *Skalarprodukt* $\langle .,. \rangle$ definiert, so ist durch

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \text{ für } x \in V$$

die durch das Skalarprodukt induzierte *Norm* des Vektors x definiert.

Das *Skalarprodukt* ist definiert durch die folgenden Bedingungen:

$$\langle x, y \rangle \text{ für alle } x, y \in V$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \text{ für alle } x \in V$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}, x, y \in V$$

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \text{ für alle } x, y, z \in V.$$

Beispiel: Durch

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^3$$

ist im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ein Skalarprodukt gegeben.

Es gilt

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \varphi .$$

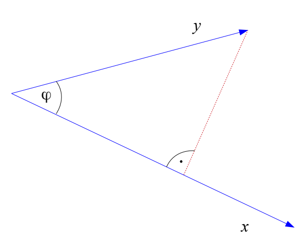


Abbildung 3.2 Skalarprodukt

Sind x und y zueinander orthogonal, so gilt daher $\langle x, y \rangle = 0$.

Das *Vektorprodukt* oder *äußeres Produkt* $x \times y$ zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ ist folgendermaßen definiert:

(i) Sind die Vektoren x, y linear abhängig, so gilt

$$x \times y = 0\,.$$

(ii) Sind die Vektoren x, y linear unabhängig, so ist $x \times y \in \mathbb{R}^3$ durch folgende Bedingungen eindeutig bestimmt:

$$\langle x \times y, x\rangle = \langle x \times y, y\rangle = 0$$

$$\|x \times y\| = \|x\|\|y\| \sin\varphi$$

Die Einheitsvektoren zu $(x, y, x \times y)$ und das (positiv orientierte) Koordinatensystem (e_x, e_y, e_z) unterscheiden sich allenfalls durch Drehungen.

Anmerkung

Der Flächeninhalt A des abgebildeten Parallelogramms ist

$$A = \|x\| \cdot h = \|x\|\|y\| \sin\varphi = \|x \times y\|\,.$$

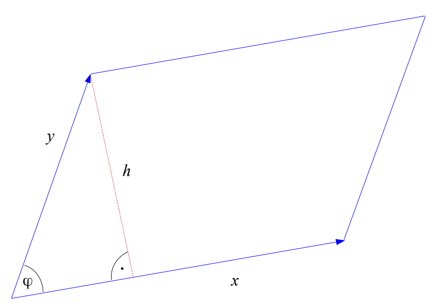


Abbildung 3.3 Flächeninhalt eines Parallelogramms

Für $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ und $w = (w_1, w_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ ist das Vektorprodukt $v \times w$ definiert durch

$$v \times w := (v_2w_3 - w_3v_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)\,.$$

Lineare Unabhängigkeit

Ein r-Tupel $(v_1, ..., v_r)$ von Vektoren v_i, $i = 1, ..., r$, eines Vektorraumes V über einem Körper $\mathbb{K}$ heißt

- *linear abhängig*, wenn sich einer der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen lässt und
- *linear unabhängig*, wenn aus

  $$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r = 0\,, \quad \lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}\,,$$

  die Eigenschaft

  $$\lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$$

  folgt. In diesem Fall lässt sich der Nullvektor demnach nur trivial aus den Vektoren v_i, $i = 1, ..., r$, linear kombinieren.

Die Menge aller Linearkombinationen von $v_i \in V$, $i = 1, ..., r$, heißt *lineare Hülle* von $(v_1, ..., v_r)$ und wird mit $L(v_1, ..., v_r)$ bezeichnet.

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $v_i \in V$, $i = 1, ..., n$. Dann heißt das n-Tupel $(v_1, ..., v_n)$ *Basis* von V, wenn $(v_1, ..., v_n)$ linear unabhängig und $L(v_1, ..., v_n) = V$ ist. Man nennt n die *Dimension* von V.

Ein r-Tupel $(v_1, ..., v_r) \in \mathbb{K}^r$ wird als *orthonormal* oder *Orthonormalsystem* bezeichnet, wenn

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j\,. \end{cases}$$

Entsprechend wird eine *Orthonormalbasis* eines Vektorraumes erklärt.

3.2 Lineare Gleichungssysteme und der Gauß-Algorithmus

Der Gauß-Algorithmus bietet ein Verfahren zur Umwandlung eines linearen Gleichungssystems

$$Ax = b$$

in eine Form

$$A'x = b'\,,$$

wobei die unterhalb der Hauptdiagonalen der Matrix A' stehenden Elemente gleich Null sind.

3.2.1 Einführung des Gauß-Algorithmus

Bei linearen Gleichungssystemen sind mehrere lineare Gleichungen gegeben, die gleichzeitig erfüllt sein sollen.

Beispiel zur Anwendung des Gauß-Algorithmus

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 0 && \text{(I)} \\ 2x + 2y - 2 &= -4z && \text{(II)} \\ -y - x - z &= -1 && \text{(III)} \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung sollte umgeformt werden zu

$$2x + 2y + 4z = 2\,.$$

Wenn wir nun die dritte Gleichung mit 2 multiplizieren, so folgt

$$\begin{aligned} 2x - 2y \phantom{{}-2z} &= 0 && \text{(I)} \\ 2x + 2y + 4z &= 2 && \text{(II)} \\ -2x - 2y - 2z &= -2 && \text{(III)}\,. \end{aligned}$$

Mit (II)-(I) und (III)+(I) erhalten wir

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 0 && \text{(I)} \\ 4y + 4z &= 2 && \text{(II)} \\ -4y - 2z &= -2 && \text{(III)}\,. \end{aligned}$$

In Matrix-Schreibweise formulieren wir das folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Mit (II)+(III) ergibt sich eine Dreiecksform der Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Aus Gleichung (III) erhalten wir

$$z = 0\,.$$

Damit folgt aus Gleichung (II)

$$4y + 4 \cdot 0 = 2$$

und somit

$$y = \frac{1}{2}\,.$$

Schließlich erhalten wir nach Gleichung (I)

$$2x - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

und damit

$$x = \frac{1}{2}\,.$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet also $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ und $z = 0$.
Man hätte auch versuchen können, das Gleichungssystem von einer *Dreiecksform* in *Diagonalform* umzuwandeln.

Wir formen folgendes Gleichungssystem weiter um:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Beispielsweise lässt sich Gleichung (II) durch 2 teilen und dann Gleichung (III) davon abziehen. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Wenn wir nun Gleichung (II) zu Gleichung (I) addieren, erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Dann teilen wir alle Gleichungen durch 2. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

3.2.2 Grundlagen des Gauß-Algorithmus

Folgende *Äquivalenzumformungen* sind im Gauß-Algorithmus erlaubt:

- Vertauschen zweier Zeilen,
- Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \neq 0$,
- Addition oder Subtraktion eines beliebigen Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Diese Umformungen heißen *elementare Zeilenumformungen*.

Der Gauß-Algorithmus dient dazu, die Koeffizientenmatrix so umzuwandeln, dass sie die Form einer oberen Dreiecksmatrix besitzt.

Der Gauß-Jordan-Algorithmus ist eine Variante des Gauß-Algorithmus. Durch dessen Anwendung soll die Koeffizientenmatrix die Form einer Diagonalmatrix annehmen.

Beispiel zur Umwandlung in eine obere Dreiecksmatrix

Gesucht ist die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Geschrieben als erweiterte Koeffizientenmatrix lautet es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 1 & 0 & 7 \end{array}\right) .$$

Nach Vertauschung der ersten beiden Zeilen ergibt sich

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 1 & 0 & 7 \end{array}\right) .$$

Die erste Zeile nutzen wir nun zu folgender Umformung der Zeilen 2 bis 4:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 12 & -6 & 9 & 21 \\ 0 & 6 & -3 & 5 & 11 \\ 0 & 10 & -6 & 7 & 21 \end{array}\right) .$$

Ersetzen wir Zeile 2 durch ein Sechstel dieser Zeile, so erhalten wir

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 6 & -3 & 5 & 11 \\ 0 & 10 & -6 & 7 & 21 \end{array}\right) .$$

Mit Hilfe der zweiten Zeile ergibt sich

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right) .$$

und somit

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) .$$

Demnach lautet die Lösung

$$x_1 = 2,\; x_2 = -1,\; x_3 = -4,\; x_4 = 1\,.$$

3.2.3 Unlösbare und unterbestimmte lineare Gleichungssysteme

Unlösbare lineare Gleichungssysteme

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$2x + y = 3 \quad \text{(I)}$$

$$4x + 2y = 12 \quad \text{(II)}\,.$$

Diese Gleichungen lassen sich folgendermaßen umformen:

$$y = -2x + 3$$

$$y = \frac{1}{2}(-4x + 12) = -2x + 6\,.$$

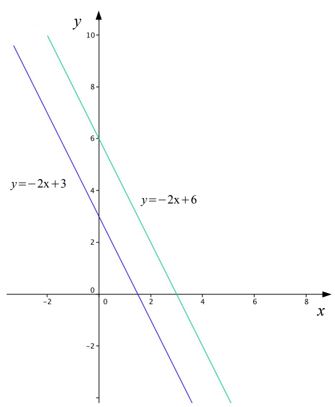


Abbildung 3.4 Parallele Geraden

Wenn wir (II) durch (II)-2(I) ersetzen, so erhalten wir

$$2x + y = 3$$

$$0 = 6\,.$$

Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme

Sei beispielsweise für zwei Variablen nur eine Gleichung gegeben:

$$x - y = 3\,.$$

Alle Punkte, die auf der Geraden liegen, bilden die Lösungsmenge dieser Gleichung. Es gibt also unendlich viele Lösungen.

Es kann aber auch unendlich viele Lösungen geben, wenn man genauso viele Gleichungen wie Variablen hat, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$x - y = 3 \qquad \text{(I)}$$

$$-3x + 3y = -9 \quad \text{(II)}\,.$$

Die zweite Gleichung ist ein Vielfaches der ersten. Beide Gleichungen beschreiben die gleiche Gerade.

Ersetzen wir (II) durch (II)+3(I), so erhalten wir

$$x - y = 3$$

$$0 = 0\,.$$

Die Lösungsmenge ist

$$\mathbb{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 3 + y \text{ mit } y \in \mathbb{R}\}\,.$$

Lineare Gleichungssysteme mit weniger nicht-trivialen Gleichungen als Variablen heißen *unterbestimmte Gleichungssysteme*.

Beispiel

Gesucht ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 8 \\ 5x + 6y + 7z &= 8 \\ 9x + 10y + 11z &= 12\,. \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise heißt das

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}\,.$$

Wir verwenden nun den Gauß-Algorithmus.

Mit $\frac{1}{2}$(I), (II)-$\frac{5}{2}$(I) und (III)-$\frac{9}{2}$(I) erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -8 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ -24 \end{pmatrix} .$$

Nun betrachten wir -$\frac{1}{4}$(II) und -$\frac{1}{8}$(III). Damit ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Mit (III)-(II) folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Betrachten wir nun Gleichung (II) und (I). So erhalten wir:

$$y = 3 - 2z$$

und

$$x + 2 \cdot (3 - 2z) + 3z = 4 \,.$$

Daher ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = -2 + z \text{ und } y = 3 - 2z \text{ mit } z \in \mathbb{R}\} \,.$$

Gleichungssysteme mit reellen Parametern

Es sei folgendes Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 12 \\ 1 & 4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ b \end{pmatrix} .$$

Mit (II)-4(I) und (III)-(I) erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & (a-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ b-1 \end{pmatrix} .$$

Nun ersetzen wir (II) durch -$\frac{1}{2}$(II):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & (a-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ b-1 \end{pmatrix} .$$

Ersetzen wir (III) durch (III)-3(II), so folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & (a+4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ b+8 \end{pmatrix} .$$

Was lässt sich nun zur Lösbarkeit des Gleichungssystems sagen?

(1) Für $a \neq -4$ gibt es eine eindeutige Lösung.

(2) Für $a = -4$ und $b = -8$ ist das Gleichungssystem (einfach) unterbestimmt. Es gibt unendlich viele Lösungen.

(3) Für $a = -4$ und $b \neq -8$ ist das Gleichungssystem unlösbar.

Für Fall (1) gilt

$$z = \frac{b+8}{a+4}$$

$$y = -3 + 2z = -3 + 2\frac{b+8}{a+4}$$

$$x = 1 - y - 2z = 1 + 3 - 2z - 2z = 4 - 4z = 4 - 4\frac{b+8}{a+4}\,.$$

Für Fall (2) gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daher

$$y = -3 + 2z$$

und

$$x = 1 - y - 2z = 4 - 4z\,.$$

Die Lösungsmenge ist daher

$$\mathbb{L} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 4 - 4z \text{ und } y = -3 + 2z \text{ mit } z \in \mathbb{R}\}\,.$$

3.2.4 Allgemeine lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$Ax = b\,,$$

wobei die Koeffizientenmatrix A durch

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

gegeben ist und $a_{ij} \in \mathbb{K}$ sei.

Wir schreiben für die Menge solcher Matrizen $M(m \times n, \mathbb{K})$.
Der Vektor x ist definiert durch

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

und der Vektor b durch

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix} .$$

Sind alle $b_i = 0$, so heißt das Gleichungssystem *homogen*, ansonsten *inhomogen*.

Die Elemente a_{ii} heißen Hauptdiagonalelemente.

Anmerkung: Ein homogenes Gleichungssystem ist immer lösbar, nämlich durch die Nulllösung.

Lösungskriterien

Die *erweiterte Koeffizientenmatrix* $(A|b)$ ist definiert durch

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) .$$

Rang einer Matrix

Der Rang $rg\, A$ einer Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ ist gleich

- der Maximalzahl linear unabhängiger Spalten und
- der Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen.

Neben den oben genannten *elementaren Zeilenumformungen*, existieren analog erklärte *elementare Spaltenumformungen*. Zusammenfassend werden diese als elementare Umformungen bezeichnet.

Der Rang einer Matrix wird durch elementare Umformungen nicht verändert.

Beispiel zur Bestimmung des Ranges einer Matrix

Um den Rang einer Matrix zu bestimmen, dürfen wir elementare Zeilen- und Spaltenumformungen verwenden. Es gilt

$$rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\,.$$

Lösungskriterien

Sei $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ und

$$Ax = b\,.$$

Demnach ist $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Variablen x_i.

Ist

- $rg\,A = rg\,(A|b) = n$,
  dann ist das lineare Gleichungssystem *eindeutig lösbar*,
- $rg\,A = rg\,(A|b) < n$,
  dann ist das lineare Gleichungssystem *lösbar* und *unterbestimmt*,
- $rg\,A \neq rg\,(A|b)$,
  dann ist das lineare Gleichungssystem *unlösbar*.

Beispiel

Gegeben sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind die jeweiligen Lösungsmengen von

$$Ax = b_1 \quad \text{und} \quad Ax = b_2\,.$$

Während im ersten Fall alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} :\ x_1 + x_2 + x_3 = 2$ das Gleichungssystem lösen, existiert im zweiten Fall keine Lösung.

Um die obigen Lösungskriterien anzwenden, bestimmen wir nun $rg\,A$ und $rg\,(A|b_1)$ sowie $rg\,(A|b_2)$. Es gilt

$$rg\,A = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\,.$$

Für den jeweiligen Rang der beiden erweiterten Koeffizientenmatrizen erhalten wir

$$rg\,(A|b_1) = rg\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = rg\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 1$$

und

$$rg\,(A|b_2) = rg\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = rg\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 2\,.$$

3.3 Matrizenrechnung

Wir betrachten Matrizen mit Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{K}$, wobei unter $\mathbb{K}$ der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ verstanden wird.

Statt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

können wir auch

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

oder

$$A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{K})$$

schreiben.

Addition und Multiplikation von Matrizen

Addition und skalare Multiplikation von Matrizen werden elementweise durchgeführt.

Definition: Seien $(a_{ij}), (b_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann wird

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{K})$$

und

$$\lambda(a_{ij}) := (\lambda a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{K})$$

gesetzt.

Definition: Seien $A = (a_{ik}) \in M(r \times m, \mathbb{K})$ und $B = (b_{kj}) \in M(m \times n, \mathbb{K})$. Dann wird das Produkt $C := AB \in M(r \times n, \mathbb{K})$ mit

$$C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,r \\ j=1,\dots,n}} ,$$

durch

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

definiert.

Der Koeffizient c_{ij} wird demnach bestimmt, indem

- die Einträge der i-ten Zeile von A mit den Einträgen der j-ten Spalte von B für die jeweils festen Werte von k multipliziert
- und diese dann für $k = 1$ bis $k = m$ summiert werden.

So gilt beispielsweise für c_{12}

$$c_{12} = \sum_{k=1}^{m} a_{1k}b_{k2} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + ... + a_{1m}b_{m2} \,.$$

Beispiel zur Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 8 + 2 \cdot 6 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 8 + 4 \cdot 6 & 3 \cdot 7 + 4 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 17 \\ 48 & 41 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Um das Produkt AB zu bilden, muss, wie oben vorausgesetzt, die Anzahl der Spalten von A mit der Anzahl der Zeilen von B übereinstimmen. Auch wenn, AB definiert ist, muss daher BA nicht notwendigerweise existieren.

Die Matrizenmultiplikation

- ist *assoziativ*, d. h. es gilt

  $$(AB)C = A(BC)\,,$$

- ist, hinsichtlich der Addition, *distributiv*, d. h.

  $$A(B + C) = AB + AC \;\text{ und }\; (A + B)C = AC + BC\,.$$

Die Matrizenmultiplikation

- ist *nicht kommutativ*, d. h. es existieren Matrizen A, B, so dass

  $$AB \neq BA\,,$$

- *nicht nullteilerfrei*, d. h. es existieren Matrizen $A \neq 0$ und $B \neq 0$, so dass

  $$AB = 0\,.$$

  Beispiel

  Für

  $$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  gilt

  $$AB = 0 \;\text{ und }\; BA \neq AB\,.$$

Beispiel zur Matrizenmultiplikation

Die relative Anzahl der Kunden dreier Unternehmen A, B und C wird über zwei Jahre beobachtet, wobei auch die "Wanderungsbewegung" der Kunden zwischen den Unternehmen untersucht wird.

Jeder Kunde lässt sich in dem Zeitraum eindeutig einem der drei Unternehmen zuordnen. Zu Beginn des ersten Jahres werden

- 55% der Kunden als Kunden des Unternehmens A,
- 35% als Kunden des Unternehmens B und
- 10% als Kunden des Unternehmens C

bezeichnet.

Bei zusätzlich gegebenem Wechselverhalten, ist nach der relativen Anzahl der Kunden der drei Unternehmen zum Ende des zweiten Jahres gefragt.
Am Ende des ersten Jahres zeigt sich folgendes Wechselverhalten:

von / nach	A	B	C
A	0,8	0,1	0,3
B	0,1	0,7	0,2
C	0,1	0,2	0,5

und am Ende des zweiten Jahres:

von / nach	A	B	C
A	0,6	0,2	0,1
B	0,1	0,6	0,1
C	0,3	0,2	0,8

Der jeweilige Anteil am Ende des ersten Jahres lässt sich beispielsweise mittels

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,55 \\ 0,35 \\ 0,10 \end{pmatrix}$$

berechnen.

So ergibt sich beispielsweise für Unternehmen A zum Ende des ersten Jahres ein Anteil von

$$0,8 \cdot 0,55 + 0,1 \cdot 0,35 + 0,3 \cdot 0,10 = 0,505\,.$$

Zum Ende des zweiten Jahres betragen die Anteile

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,55 \\ 0,35 \\ 0,10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3845 \\ 0,2600 \\ 0,3555 \end{pmatrix} .$$

Dabei ist das Produkt assoziativ, so dass das Produkt der beiden Matrizen angewandt auf den ”Anteilsvektor” zum gleichen Ergebnis führt, wie die jahresweise Berechnung der Anteile.

3.4 Determinanten

Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ lässt sich schreiben als

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Bezeichnen wir die einzelnen Zeilen durch die Vektoren

$$a_i := (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, ..., a_{in}),$$

so können wir A folgendermaßen umformulieren:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung

$$\det : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

heißt *Determinante*, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

- Die Abbildung $\det$ ist *linear in jeder Zeile*, d. h. für $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$
  - und $a_i = a_i' + a_i''$, mit $i = 1, ..., n$, gilt

$$\det \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ a_i \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ a_i' \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ a_i'' \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

  - und $a_i = \lambda a_i'$, mit $\lambda \in \mathbb{K}$, gilt

$$\det \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ a_i \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ a_i' \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}.$$

- Die Abbildung $\det$ ist *alternierend*, d. h. wird A durch Vertauschen zweier Zeilen in A' verwandelt, so gilt

  $$\det A' = -\det A\,.$$

- Ist $E = \mathit{Id} \in M(n \times n, \mathbb{K})$ die Einheitsmatrix

  $$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

  so gilt

  $$\det E = 1\,.$$

Statt

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

schreiben wir auch

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.

- Für $n = 1$ und $A = (a)$ gilt

$$\det(a) = a\,.$$

- Für $n = 2$ gilt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,.$$

- Für $n = 3$ gilt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}\,.$$

Regel von Sarrus

Sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$. Nach der Regel von Sarrus erhalten wir die oben genannte Formel mittels der Anordnung

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

und der Konvention, die Produkte längs der drei Diagonalen von links oben nach rechts unten mit positivem Vorzeichen und die Produkte von links unten nach rechts oben mit negativem Vorzeichen zu versehen.

Beispiel

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 1 - (3 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 3) = -16\,.$$

Laplacescher Entwicklungssatz

Entwicklung der Determinante nach der i-ten Zeile: Ist $n \geq 2$ und $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, so gilt

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \text{für alle } i = 1, ..., n\,.$$

Dabei bezeichnet A_{ij} die Matrix, die aus A entsteht, wenn die i-te Zeile und die j-te Spalte weggelassen werden.

Entwicklung der Determinante nach der j-ten Spalte: Ist $n \geq 2$ und $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, so gilt

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \text{für alle } j = 1, ..., n\,.$$

Beispiel

Mit dem *Laplaceschen Entwicklungssatz* lässt sich

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 3\,. \end{aligned}$$

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} \in M(n \times n; \mathbb{K}) \, .$$

Die Determinante

$$\det : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

hat folgende Eigenschaften:

- Für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt
$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A \, .$$
- Gibt es eine Zeile i mit $a_i = (0, ..., 0)$, so gilt
$$\det A = 0 \, .$$
- Entsteht A' durch Vertauschung zweier Zeilen aus A, so gilt
$$\det A' = - \det A \, .$$
- Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ und entsteht A' durch Addition von $\lambda a_j = (\lambda a_{j1}, ..., \lambda a_{jn})$ zu a_i mit $i \neq j$, so gilt
$$\det A' = \det A \, .$$
- Es gilt
$$\det A = 0$$
genau dann, wenn die Zeilenvektoren $a_1, ..., a_n$ linear abhängig sind.
- Ist A eine obere Dreiecksmatrix, d. h.
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \, ,$$
so gilt
$$\det A = a_{11} \cdot ... \cdot a_{nn} \, .$$

Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, so ist das das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

genau dann *eindeutig lösbar*, wenn

$$\det A \neq 0\,.$$

Ist $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{K})$, so heißt $A^t = (a^t_{ij}) \in M(n \times m, \mathbb{K})$, mit $a^t_{ij} := a_{ji}$, die zu A *transponierte Matrix*.

Beispiele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\,, \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\,,$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\,, \quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\,.$$

Für $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ gilt

$$\det A^t = \det A\,.$$

Für $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ gilt

$$\det AB = \det A \cdot \det B\,.$$

Cramersche Regel

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ mit $\det A \neq 0$, $b \in \mathbb{K}^n$ und $x \in \mathbb{K}^n$ die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems

$$A \cdot x = b\,.$$

Unter $a^1, ..., a^n$ verstehen wir die Spaltenvektoren von A. Dann gilt

$$x_i = \frac{\det(a^1, ..., a^{i-1}, b, a^{i+1}, ..., a^n)}{\det A}\,.$$

Beispiel

Gesucht ist die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Ax = b$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$\det A = 2$$

und, nach der Cramerschen Regel,

$$x_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1\,, \qquad x_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

und

$$x_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1\,.$$

3.5 Inversion von Matrizen

Gilt für $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, dass $\det A \neq 0$, so ist A *invertierbar*. Dann gilt für die zu A *inverse Matrix* A^{-1}

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} \,.$$

Eine invertierbare Matrix wir auch als *regulär* bezeichnet.

Sind $A, B, E \in M(n \times n, \mathbb{K})$, wobei

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cdot & & 0 \\ & & \cdot & \\ 0 & & & \cdot \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \,,$$

so ist B genau dann die zu A inverse Matrix A^{-1}, wenn

$$AB = BA = E$$

gilt.

Gilt für $A, B, C \in M(n \times n, \mathbb{K})$

$$AB = C \,,$$

so gilt auch

$$A'B = C' \,,$$

wenn (A, C) durch elementare Zeilenumformungen in (A', C') umgewandelt wird.

Wird dabei (A, E) in (E, C') verwandelt, so ist $C' = A^{-1}$.

Beispiel

Für $A \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

betrachten wir

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

und formen (A, E) folgendermaßen um:

- *1. Schritt*

$$\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

- *2. Schritt*

$$\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

- *3. Schritt*

$$\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

- *4. Schritt*

$$\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Demnach ist die Matrix A invertierbar und es gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Für $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ kann auch folgendes Verfahren zur Matrizeninversion genutzt werden:

Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ und $\det A \neq 0$, so gilt

$$A^{-1} = (\det A)^{-1}(b_{ij}) \text{ mit } b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji} \,.$$

Beispiele

- Für $n = 3$ gilt

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} & \det A_{31} \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & -\det A_{32} \\ \det A_{13} & -\det A_{23} & \det A_{33} \end{pmatrix} .$$

  Mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

  erhalten wir

$$\det A = 5 \,,$$

$$\det A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \,, \ \det A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5 \,, \ \det A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \,,$$

$$\det A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \,, \ \det A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \,, \ \det A_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -5 \,,$$

$$\det A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \,, \ \det A_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \,, \ \det A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

  und demnach

$$A^{-1} = (\det A)^{-1}(b_{ij}) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} & \det A_{31} \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & -\det A_{32} \\ \det A_{13} & -\det A_{23} & \det A_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 5 & 5 & -5 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} .$$

- Für $n = 2$ gilt

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} .$$

3.6 Basisvektoren und lineare Abbildungen

Basiswechsel und lineare Koordinatentransformationen

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, $v_i \in V$, $i = 1, ..., n$, und $\mathcal{A} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ eine Basis von V. Ist $x \in V$, so heißen die eindeutig bestimmten Koeffizienten $x_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, ..., n$, der Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

die *Koordinaten von x bezüglich $\mathcal{A}$*. Abgekürzt wird auch $x = (x_1, x_2, ..., x_n)_{\mathcal{A}}$ geschrieben. Dabei heißt $x = (x_1, x_2, ..., x_n)_{\mathcal{A}}$ der *Koordinatenvektor* von x bezüglich der Basis $\mathcal{A}$.

Eine lineare Koordinatentransformation von einer Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ zu einer anderen Basis $\mathcal{B} = (w_1, w_2, ..., w_n)$, $w_i \in V$, $i = 1, ..., n$, des Vektorraumes V lässt sich als

$$w_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_k \ , \ i = 1, 2, ..., n \ ,$$

mit $a_{ik} \in \mathbb{K}$, schreiben. Dann erhalten wir, für $x \in V$ mit

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)_{\mathcal{A}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)_{\mathcal{B}} \ ,$$

die Transformationsformeln

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \tilde{x}_i \ , \ k = 1, 2, ..., n \ .$$

Demnach können wir, mit $A = (a_{ik}) \in M(n \times n, \mathbb{K})$, auch

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = (A^t)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

schreiben.

Sei

$$\langle x, y \rangle := x^t \cdot y = x_1 y_1 + ... + x_n y_n \ , \ x, y \in \mathbb{R}^n \ .$$

Bilden die Spaltenvektoren oder die Zeilenvektoren von $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bezüglich dieses Skalarproduktes, so gilt

$$\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle \ \text{ für alle } v, w \in \mathbb{R}^n$$

und A wird als *orthogonale Matrix*, kurz $A \in O(n)$, bezeichnet. Für orthogonale Matrizen gilt

$$A^t A = E\,,\ A^{-1} = A^t$$

und

$$|\det A| = 1\,.$$

Ist $A \in O(2)$, so gibt es ein $\varphi \in [0, 2\pi)$, so dass entweder

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

oder

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

gilt. Im ersten Fall wird die Abbildung A als *Drehung*, im zweiten Fall als *Spiegelung* bezeichnet. Wir können die Multiplikation einer Drehmatrix mit einem Vektor als Drehung des Vektors auffassen oder, mit umgekehrten Drehsinn, als Drehung des Koordinatensystems.

Betrachten wir nun, statt $V = \mathbb{R}^2$, den $\mathbb{R}^3$, so stellt sich bei einer Drehung die Frage, um welche Achse diese ausgeführt werden soll. Beispielsweise wird durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

eine Drehung um die x-Achse beschrieben.

Lineare Abbildungen und Matrizen

Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$ der Dimension n bzw. m. Die jeweiligen Basen seien $\mathcal{A} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ und $\mathcal{B} = (w_1, v_2, ..., w_m)$. Dann gibt es zu einer linearen Abbildung

$$F : V \to W$$

eindeutig bestimmte $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$, so dass

$$F(v_j) = a_{1j}w_1 + ... + a_{mj}w_m\,.$$

Die durch

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F) := (a_{ij})$$

erklärte Matrix $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)$ wird als *die lineare Abbildung F bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ darstellende Matrix* bezeichnet. Es zeigt sich dabei, dass die Spaltenvektoren von $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)$ die Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren $v_1, ..., v_n$ sind.

Im Falle $V = W$ und $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ schreiben wir abkürzend

$$M_{\mathcal{B}}(F) := M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)\,.$$

3.7 Eigenwertprobleme

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Der *Eigenraum* $E_\lambda = E_\lambda(A)$ von A bezüglich λ ist durch

$$E_\lambda := \text{Kern } (A - \lambda \, Id) := \{v \in \mathbb{K}^n \mid (A - \lambda \, Id)v = 0\}$$

definiert. Es gilt demnach

$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = \lambda v\} \, .$$

Ein Element $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt *Eigenwert* einer Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, wenn es ein $v \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$, mit

$$Av = \lambda v$$

gibt. Dann heißt v *Eigenvektor* von A zum Eigenwert λ.

Beispiel

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \, .$$

Dann ist

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$. Es sind auch

$$\mu_1 \cdot v_1 \ \text{ und } \ \mu_2 \cdot v_2 \, ,$$

mit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, Eigenvektoren zu λ_1 bzw. λ_2. Die jeweiligen Eigenräume sind

$$E_{\lambda_1} = \{v = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

und

$$E_{\lambda_2} = \{v = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$$

mit $\mu, \nu \in \mathbb{K}$.

Das charakteristische Polynom

Das lineare Gleichungssystem

$$(A - \lambda Id)v = 0$$

hat genau dann nichttriviale Lösungen, wenn

$$rg\,(A - \lambda Id) < n$$

ist. Das ist wiederum genau dann der Fall, wenn

$$\det(A - \lambda Id) = 0$$

ist.

Für das *charakteristische Polynom*

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda Id)$$

gilt

$$p_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + ... + a_n\lambda^n\,,$$

mit $\lambda \in \mathbb{K}$, $a_i \in \mathbb{K}$ und $a_n \neq 0$.

Beispiel

Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lautet

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2\,.$$

Demnach sind die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = 1\,.$$

Die zugehörigen Eigenvektoren x sind Lösungen von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v = 1 \cdot v\,.$$

Somit erhalten wir

$$v = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

Anmerkung: Es muss keine reellen Eigenwerte geben, wie beispielsweise die Bestimmung des charakteristischen Polynoms von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

zeigt. Hier erhalten wir

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1\,.$$

Beispiel

Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

lautet

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\,.$$

Der Wert der Determinante wird nicht verändert, wenn wir zu einem Zeilenvektor das Vielfache eines anderen Zeilenvektors addieren. Daher gilt

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda+1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda+1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda+1 & 1-\lambda \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-\lambda+1)\left((-\lambda+1)(-\lambda) - (1-\lambda)\right) - (1-\lambda)^2$$
$$= -(1-\lambda)^2 \cdot (\lambda+2)\,.$$

Die Eigenwerte sind demnach

$$\lambda_{1,2} = 1\,, \lambda_3 = -2$$

und die zugehörigen Eigenvektoren

$$v_{1,2} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,, \quad \text{mit } \mu, \nu \in \mathbb{R} : v_{1,2} \neq 0 \,,$$

und

$$v_3 = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \,, \quad \text{mit } \mu \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \,.$$

3.8 Diagonalisierbarkeit von Matrizen

Zwei Matrizen $A, A' \in M(n \times n, \mathbb{K})$ werden als *ähnlich* bezeichnet, wenn es eine invertierbare Matrix $C \in M(n \times n, \mathbb{K})$ gibt, so dass

$$A' = C^{-1}AC$$

gilt. Ist A einer Diagonalmatrix A' ähnlich, so wird A *diagonalisierbar* genannt. Dabei wird eine Matrix $(a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{K})$ als *Diagonalmatrix* bezeichnet, wenn $a_{ij} = 0$, für $i \neq j$. Ist A hingegen einer oberen Dreicksmatrix ähnlich, so wird A *trigonalisierbar* genannt.

Wir verwenden als lineare Abbildung F nun

$$A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \, .$$

Dann kann die Zuordnung von A' zu A im Rahmen eines Basiswechsel betrachtet werden. Dabei wird eine Matrix C gesucht, so dass

$$M_{\mathcal{B}'}(F) = C^{-1}M_{\mathcal{B}}(F)C$$

eine Diagonalmatrix ist. Folglich muss $\mathcal{B}'$ aus Eigenvektoren von F bestehen. Dann sind die Spalten der Matrix C die Koordinatenvektoren dieser Eigenvektoren bezüglich der Basis $\mathcal{B}'$.

Geometrische und algebraische Vielfachheit

(i) Sei $E_{\lambda_i} = E_{\lambda_i}(A)$ der Eigenraum von $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ bezüglich $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Dann bezeichnet $dim\, E_{\lambda_i}$ die *geometrische Vielfachheit von* λ_i.

(ii) Die Anzahl des Auftretens der Linearfaktoren $(\lambda - \lambda_i)$ im charakteristischen Polynom wird als *algebraische Vielfachheit der Nullstelle* λ_i *des charakteristischen Polynoms* bezeichnet.

Zerfällt das charakteristische Polynom vollständig in Linearfaktoren und ist für alle Eigenwerte die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit, so die Matrix diagonalisierbar.

Ist die Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ diagonalisierbar und hat die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_r$, so gilt

$$M_{\mathcal{B}'}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & & & & \lambda_r & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix} ,$$

wobei die Eigenwerte λ_i jeweils n_i-mal auftreten und $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$ ist.

Weiterhin gilt:

(i) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ mit Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_r$ und $E_{\lambda_i} = E_{\lambda_i}(A)$, $i = 1, ..., r$. Dann ist A genau dann diagonalisierbar, wenn

$$\sum_{i=1}^{r} \dim E_{\lambda_i} = n\,.$$

(ii) Hat $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, so ist das n-Tupel $(v_1, ..., v_n)$ der zugehörigen Eigenvektoren linear unabhängig und A ist diagonalisierbar.

(iii) Ist $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch, d. h. gilt $a_{ij} = a_{ji}$ oder, anders ausgedrückt, $A = A^t$, so ist A diagonalisierbar.

Zudem haben ähnliche Matrizen das gleiche charakteristische Polynom und die gleichen Eigenwerte.

Sind $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ die Eigenwerte von $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, so gilt

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

und

$$sp\, A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,.$$

Hauptachsentransformation

Für symmetrische Matrizen $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ existiert eine Matrix $C \in O(n)$, so dass

$$A' = C^t A C$$

eine Diagonalmatrix ist.

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch und $v = (x_1, x_2, ..., y_n)^t$, $w = (y_1, y_2, ..., y_n)^t$. Bei der *Hauptachsentransformation quadratischer Formen* soll ein Term

$$v^t A v\,,$$

mittels $C \in O(n)$ und

$$v =: Cw\,,$$

auf die Form

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2$$

transformiert werden. Zumal

$$v^t A v = w^t (C^t A C) w\,,$$

besteht dabei die Aufgabe darin, eine orthogonale Matrix C zu finden, so dass $C^t A C$ eine Diagonalmatrix ist.

In diesem Zusammenhang werden die Eigenvektoren auch *Hauptachsen* (der quadratischen Form) und die Abbildung

$$A \mapsto C^t A C$$

Hauptachsentransformation genannt.

Als Spalten von C werden die Vektoren eines Orthonormalsystems von Eigenvektoren $(v_1, ..., v_n)$ von A verwendet.

Beispiel

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch. Da

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) = \det & \begin{pmatrix} 1-\lambda & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)(-(1-\lambda)(1+\lambda) - 3) = (3-\lambda)(-(1-\lambda^2) - 3) \\ &= (3-\lambda)(-4+\lambda^2)\,, \end{aligned}$$

sind $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = -2$ die Eigenwerte. Für den zu λ_1 zugehörigen Eigenvektor betrachten wir

$$\begin{array}{ccc|c} -2 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} -2\sqrt{3} & 3 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} -2 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

und erhalten

$$v_1 = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\} .$$

Für den zu λ_2 zugehörigen Eigenvektor betrachten wir

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{3} & 3 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

und erhalten

$$v_2 = \mu \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\} .$$

Für den zu λ_3 zugehörigen Eigenvektor betrachten wir

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

und erhalten

$$v_3 = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\} .$$

Nun normieren wir diese Eigenvektoren v_i so, dass $|v_i| = 1$, und erhalten die orthogonale Transformationsmatrix

$$V = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

mit

$$V^t A V = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

Anwendung: Bestimmung der Hauptträgheitsmomente

Die kinetische Energie eines starren Körpers lässt sich als

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m|v|^2 + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i,k\leq 3} I_{ik}\,\omega_i\omega_k$$

schreiben. Dabei ist $v \in \mathbb{R}^3$ die Translationsgeschwindigkeit des Schwerpunktes des starren Körpers, m dessen Gesamtmasse, $\omega \in \mathbb{R}^3$ die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des starren Körpers, ω_i, $i = 1, 2, 3$, dessen Komponenten und I_{ik} die Komponenten der Trägheitstensor jeweils hinsichtlich des gewählten orthogonalen Koordinatensystems.

Die Komponenten des *Trägheitstensors* (I_{ik}) sind, bei kontinuierlicher Massenverteilung, folgendermaßen definiert:

$$I_{ik} := \int \rho \cdot (|x|^2\delta_{ik} - x_i x_k)\, d^3x \ , \quad i, k = 1, 2, 3 \, .$$

Dabei liegt der Nullpunkt des Koordinatensystems im Schwerpunkt, so dass $x \in \mathbb{R}^3$ der Abstand vom Schwerpunkt ist.

Da der Trägheitstensor eine reelle symmetrische Matrix ist, lässt er sich diagonalisieren. Die dabei erhaltenen Drehachsen heißen *Hauptträgheitsachsen* und die Diagonalelemente der Matrix *Hauptträgheitsmomente*. Wir bezeichnen diese als I_1, I_2 und I_3, wobei der Index i für die Position ii innerhalb der diagonalisierten Matrix steht. Die Rotationsenergie lässt sich so in der Form

$$E_{rot} = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

schreiben. Die Werte ω_i, $i = 1, 2, 3$, sind dabei die Komponenten von $\omega \in \mathbb{R}^3$ hinsichtlich der jeweiligen Hauptachse.

Lässt das charakteristische Polynom von $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ die Linearfaktorzerlegung

$$p_A(\lambda) = \pm(\lambda - \lambda_1) \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_n)\,,$$

mit $\lambda, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, zu, so ist A trigonalisierbar. Das ist beispielsweise für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ der Fall.

Eine Matrix $J \in M(r \times r, \mathbb{K})$, $1 \leq r \leq n$, wird *Jordanmatrix (zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$)* genannt, wenn

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Eine Matrix aus $M(n \times n, \mathbb{K})$ wird als Matrix in *Jordanscher Normalform* bezeichnet, wenn sie die Gestalt

$$\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_l \end{pmatrix},$$

mit Jordanmatrizen $J_1, ..., J_l$, hat.

Jede Matrix in $M(n \times n, \mathbb{C})$ ist einer Matrix in Jordanform ähnlich.

3.9 Übungsaufgaben: Lineare Algebra

Aufgabe 1
Sei

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind und einen zweidimensionalen Vektorraum V aufspannen.

b) Ist $\vec{a} \in V$? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Koordinaten bzgl. der Basis $\{\vec{b}, \vec{c}\}$.

Aufgabe 2
Untersuchen Sie die folgenden Vektoren auf lineare Unabhängigkeit:

(i)

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(iv)

$$\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{d}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3
Sei

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Sind die Vektoren linear unabhängig?

b) Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ bzgl. des Orthonormalsystems

$$(\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3) = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1,0), \frac{1}{\sqrt{21}}(-2,2,2,3)).$$

Aufgabe 4
Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen bezüglich der kanonischen Basis für folgende lineare Abbildungen:

a)

$$l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (x_1, x_2) \mapsto l(x) = (x_1 + x_2, x_2 - x_1),$$

b)

$$l : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ (x_1, x_2, x_3) \mapsto l(x) = (-2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, -x_1 + x_2 - 2x_3).$$

Aufgabe 5
Ein Dreieck im zweidimensionalen Raum sei durch die Eckpunkte $P_1(0,-2)$, $P_2(-2,1)$ und $P_3(1,3)$ gegeben.

a) Das Dreieck soll an der Winkelhalbierenden $y = x$ gespiegelt werden. Geben Sie die Abbildungsmatrix bzgl. der Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^2$ an und führen Sie die Spiegelung durch. Was sind die Eckpunkte des gespiegelten Dreiecks?

b) Das gespiegelte Dreieck soll nun noch um den Ursprung um $45°$ mit dem Uhrzeigersinn gedreht werden. Geben Sie auch für diese Drehung die Abbildungsmatrix bzgl. der Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^2$ an. Was sind die Eckpunkte des Dreiecks nach Spiegelung und Drehung?

c) Geben Sie die Abbildungsmatrix an, mit der Spiegelung und Drehung gleichzeitig durchgeführt werden können.

Aufgabe 6
Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Algorithmus:

a)

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = -1 \\ & x_2 & -x_3 & = 0 \\ 3x_1 & +x_2 & & = 5 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rrrl} 2x_1 & +5x_2 & +3x_3 & = 17 \\ x_1 & -2x_2 & -x_3 & = -1 \\ 3x_1 & & +2x_3 & = 8 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \end{array}$$

Aufgabe 7
Bestimmen Sie ein Polynom, dessen Graph folgende Punkte enthält:

$$P_0(-1,2),\ P_1(-2,-11),\ P_2(1,-2),\ P_3(2,5) \ \text{ mit } y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,.$$

Aufgabe 8
Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1, & -1, & 1 \end{pmatrix}$$

a) Welche der Matrizen-Produkte

$$AA,\ AB,\ AD,\ BD,\ DB,\ DD$$

sind definiert? Berechnen Sie diese.

b) Welche weiteren Produkte dieser Matrizen existieren?

c) Bestimmen Sie den Rang der Matrizen A, B, C und D.

Aufgabe 9
Sei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Verfahrens:

a)

$$\begin{array}{rcrrr} \alpha^2 &=& \alpha x & +y & +z \\ \alpha &=& x & +\alpha y & +z \\ 1 &=& x & +y & +\alpha z \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrrr} -2 &=& x & -y & +z \\ -4 &=& 2x & & +\beta z \\ \alpha &=& -x & +2y & +z \end{array}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 4 & -\frac{4}{5} & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{\alpha}{5} \\ \frac{25}{4} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10
Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Inversen, falls die jeweiligen Matrizen regulär sind.

Aufgabe 11
Zeigen Sie, mit Hilfe elementarer Zeilen- oder Spaltenumformungen, dass die Determinanten der folgenden Matrizen verschwinden:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 8 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12
Berechnen Sie folgende Determinanten:

a)

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 10 & 5 \\ 5 & 0 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}$$

Aufgabe 13
Welchen Rang haben die folgenden Matrizen?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 2 & 6 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & c \end{pmatrix}, \text{ mit } c \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 14
Bestimmen Sie für folgende Matrizen die reellen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

e)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

f)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie für Aufgabenteil f) außerdem

$$\det A \;\; \text{und} \;\; sp\, A = \sum_{i=1}^{3} a_{ii}\,.$$

Aufgabe 15
Ist eine Diagonalisierung folgender Matrizen möglich? Geben Sie gegebenenfalls die Transformationsmatrix an. Führen Sie bei den Aufgabenteilen d), e) und f) ggf. eine Diagonalisierungstranformation durch.

a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} ,$$

b)
$$A = \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} ,$$

c)
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} ,$$

d)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} ,$$

e)
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 16
Es sei folgende lineare Abbildung $l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$
gegeben. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A der Abbildung l bzgl. der kanonischen Basis und der Basis
$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\} .$$

Aufgabe 17
Gegeben ist folgender Spannungstensor:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie die Hauptspannungen und die Hauptspannungsrichtungen.

4 Differentialrechnung von Funktionen einer reellen Veränderlichen

4.1 Folgen und Reihen

Unter einer *Folge* reeller Zahlen versteht man eine Abbildung

$$n \mapsto a_n \,,$$

wobei $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ oder $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ und $a_n \in \mathbb{R}$.
Die reelle Zahlenfolge ist daher eine *Abbildung* von $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$.

Man schreibt dafür $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ oder $(a_0, a_1, a_2, ...)$.

So wird beispielsweise durch die Abbildung $n \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ eine Folge $(\dfrac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ definiert.

Beispiele für Zahlenfolgen

(1) $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$: $(1, -1, 1, -1, 1, -1, ...)$

(2) *arithmetische Folge*: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, $n \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{R}$

(3) *geometrische Folge*: $a_n = a_1 q^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$

(4) $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$: $(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...)$

(5) Sei $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 2$.
Diese Folge $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...)$ heißt Folge der ”Fibonacci-Zahlen”.

4.1.1 Konvergenz von Folgen

Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge heißt *konvergent* gegen $a \in \mathbb{R}$, falls

zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}_0$ existiert, so dass

$|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N$.

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Die reelle Zahl a heißt *Grenzwert* oder *Limes* der Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.
Satz (Eindeutigkeit des Limes): Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ besitzt höchstens einen Grenzwert.

Beweis: Angenommen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiere gegen a und $\tilde{a}$, wobei $a \neq \tilde{a}$. Wir setzen

$$\epsilon := \frac{|a-\tilde{a}|}{2}\,.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gilt, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \epsilon \;\text{ für alle } n \geq N\,.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \tilde{a}$ gilt, existiert ein $\tilde{N} \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - \tilde{a}| < \epsilon \;\text{ für alle } n \geq \tilde{N}\,.$$

Für $n > \max(N, \tilde{N})$ erhalten wir nun

$$|a-\tilde{a}| = |(a-a_n)+(a_n-\tilde{a})| \leq |a_n - a| + |a_n - \tilde{a}| < 2\epsilon = |a-\tilde{a}|\,.$$

Da das ein Widerspruch ist, muss die Annahme falsch sein.

Beispiele für konvergente Folgen

Die Folge $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert:

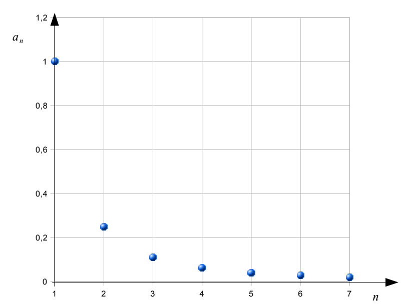


Abbildung 4.1 Die Folge $(n^{-2})_{n\in\mathbb{N}}$

Die Folge $((-1)^n \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert:

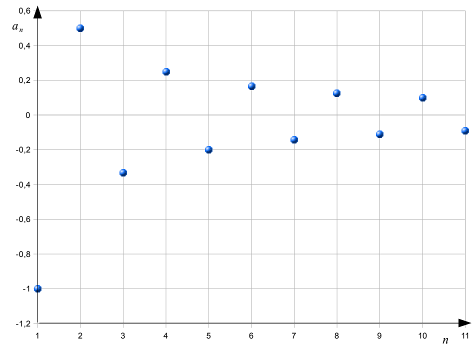


Abbildung 4.2 Die Folge $((-1)^n n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$

Die Folge $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert:

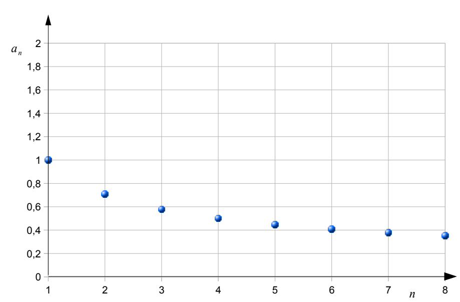


Abbildung 4.3 Die Folge $((\sqrt{n})^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$

Beispiele zum Grenzwert

(1) Sei $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Die Folge lautet also

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...)\,.$$

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,,$$

da zu $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_n - a| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \epsilon \text{ für alle } n \geq N(\epsilon) .$$

Hierzu muss lediglich $N(\epsilon) > \dfrac{1}{\epsilon}$ gewählt werden.

(2) Sei $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Die Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ...) .$$

konvergiert gegen 1, da

$$|a_n - a| = |1 - \frac{1}{n} - 1| = \frac{1}{n}$$

und wir wie in (1) argumentieren können.

(3) Sei $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Die Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ...) .$$

konvergiert gegen 1, da

$$|a_n - a| = |1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1| = \frac{1}{n}$$

und wir wieder wie in (1) verfahren können.

(4) Sei $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Die Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, ...) .$$

konvergiert gegen 0, da zu $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_n - a| = |\frac{1}{\sqrt{n}} - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon \text{ für alle } n \geq N(\epsilon) .$$

Hierzu muss lediglich $N(\epsilon) > \dfrac{1}{\epsilon^2}$ gewählt werden.

Wenn die reelle Zahlenfolge gegen keine reelle Zahl konvergiert, dann wird sie *divergent* genannt.

Beispiele für divergente Folgen

Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, wie die nächste Abbildung zeigt:

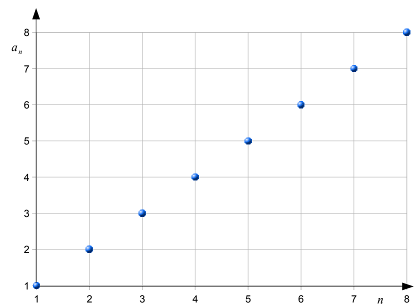


Abbildung 4.4 Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$

Die Folge $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert:

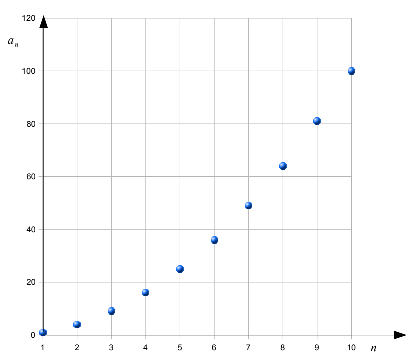


Abbildung 4.5 Die Folge $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen heißt *bestimmt divergent* gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$), wenn es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass

$$a_n > K \text{ (bzw. } a_n < K) \text{ für alle } n \geq N\,.$$

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$)

Statt *bestimmt divergent* sagt man auch *uneigentlich konvergent*.

Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert:

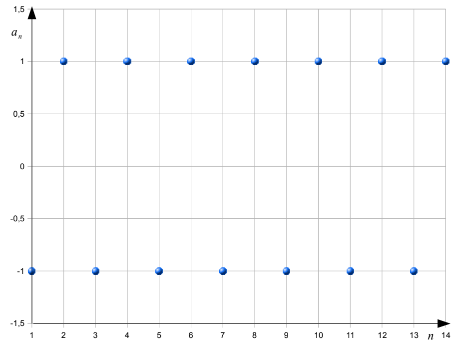


Abbildung 4.6 Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Eine Zahl a heißt *Häufungspunkt* einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen a konvergiert.

Beispielsweise besitzt die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Häufungspunkte $+1$ und -1.

Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge und

$$n_1 < n_2 < n_3 < ....$$

eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt die Folge

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, ...)$$

Teilfolge der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Summe, Differenz, Produkt und Quotient konvergenter Folgen

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergente Folgen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n =: a \quad\text{und}\quad \lim_{n\to\infty} b_n =: b\,,$$

so konvergiert auch die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$c_n := a_n \cdot b_n$$

und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b\,.$$

Entsprechende Regeln gelten für die Addition und Subtraktion.

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergente Folgen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n =: a \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n =: b \neq 0\,,$$

so existiert ein $N \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$b_n \neq 0 \quad \text{für alle } n \geq N\,.$$

Sei

$$c_n := \frac{a_n}{b_n} \quad \text{für alle } n \geq N\,.$$

Dann konvergiert die Folge $(c_n)_{n\geq N}$ und

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}\,.$$

Beispiele

- Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

  $$a_n = \frac{4n^2+7n-3}{7n^2+2} = \frac{4+\frac{7}{n}-\frac{3}{n^2}}{7+\frac{2}{n^2}}$$

  verwenden wir

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}\,.$$

  Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Summe, Differenz und Quotient (mit Nenner $\neq 0$) konvergenter Folgen ist, konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  Der Grenzwert ist

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{7}\,.$$

- Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\geq 2}$ mit

  $$\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2}) \quad \text{für } n \geq 2\,.$$

  Es gilt

  $$a_2 = \frac{3}{4}$$

  und für $n \geq 3$:

  $$a_n = a_{n-1}(1-\frac{1}{n^2}) = a_{n-1}\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\,.$$

Demnach gilt

$$a_n \frac{n}{n+1} = a_{n-1} \frac{n-1}{n} = ... = a_2 \frac{2}{3} = \frac{3}{4}\frac{2}{3} = \frac{1}{2} \text{ für alle } n \geq 3\,.$$

Somit erhalten wir

$$a_n = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n}) \text{ für alle } n \geq 3\,.$$

Die Folge $(a_n)_{n\geq 2}$ ist demnach konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}\,.$$

Beschränkte Folgen

Bekanntlich ist jede konvergente Folge beschränkt, d. h. es existiert eine obere und untere Schranke. Zwar gilt die Umkehrung der Aussage nicht, doch finden wir folgende Aussagen:

- Jede beschränkte monotone Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen konvergiert.
  - Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, so konvergiert die Folge.
  - Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, so konvergiert die Folge.
- *Satz von Bolzano-Weierstraß:* Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beispiel zur Konvergenz einer monotonen beschränkten Folge

Die Folge

$$((1 + \frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}} = (2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, ...)$$

ist monoton wachsend und nach oben beschränkt. Demnach konvergiert die Folge. Ihr Grenzwert ist die *Eulersche Zahl* $e = 2,71828...$. Das lässt sich folgendermaßen, mit Hilfe des Ableitungsbegriffs, zeigen: Es gilt

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}\,,$$

daher

$$\ln'(1) = 1$$

und demnach

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \ln(1 + \frac{1}{n}) = 1\,.$$

Mit

$$(1+\frac{1}{n})^n = \exp(n \cdot \ln(1+\frac{1}{n}))$$

erhalten wir folglich

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e\,.$$

Entsprechend lässt sich auch zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty}(-n \cdot \ln(1-\frac{1}{n})) = 1$$

und daher

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = e^{-1} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{-n} = e$$

ist.

Anmerkungen:

Seien a, b positive reelle Zahlen.

(i) Es gilt

$$(1+\frac{1}{an})^{bn} = \exp(bn \cdot \ln(1+\frac{1}{an})) = \exp(\frac{b}{a} \cdot an \cdot \ln(1+\frac{1}{an})) = (e^{an\ln(1+\frac{1}{an})})^{\frac{b}{a}}$$

und demnach

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{an})^{bn} = e^{\frac{b}{a}}\,.$$

(ii) Es gilt

$$(1-\frac{1}{an})^{bn} = \exp(bn \cdot \ln(1-\frac{1}{an})) = \exp(\frac{b}{a} \cdot an \cdot \ln(1-\frac{1}{an})) = (e^{-an\ln(1-\frac{1}{an})})^{-\frac{b}{a}}$$

und demnach

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{an})^{bn} = e^{-\frac{b}{a}}\,.$$

Der Begriff der Cauchy-Folge

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls

> zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}_0$ existiert, so dass
>
> $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$.

Folglich ist jede konvergente Folge auch eine Cauchy-Folge.
Umgekehrt konvergiert, nach dem Vollständigkeitsaxiom, in $\mathbb{R}$ jede Cauchy-Folge.

Beispiel zur Konvergenz einer Cauchy-Folge

Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gelte für $n > 2$

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}| \quad \text{mit } 0 < q < 1 \,.$$

Es lässt sich zeigen, dass

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q^{n-1}|a_2 - a_1| \,,$$

und mit Hilfe der Dreiecksungleichung, dass

$$|a_{n+r} - a_n| \leq |a_{n+r} - a_{n+r-1}| + ... + |a_{n+2} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_n| \,, \quad \text{mit } r \in \mathbb{N} \,.$$

Daher gilt

$$|a_{n+r} - a_n| \leq (q^{n+r-2} + ... + q^n + q^{n-1})\, |a_2 - a_1|$$

und somit

$$|a_{n+r} - a_n| \leq \frac{q^{n-1}}{1-q}\, |a_2 - a_1| \,.$$

Nun kann zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so gewählt werden, dass

$$\frac{q^{n-1}}{1-q}\, |a_2 - a_1| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq N \,.$$

Demnach ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und damit eine konvergente Folge.

Eine numerische Anwendung: Das Heron-Verfahren

Um die Quadratwurzel positiver reeller Zahlen numerisch zu berechnen, stellen wir hier ein Verfahren vor, dass besonders schnell gegen die Lösung der Gleichung

$$a^2 = b$$

konvergiert. Dabei seien b und a positive reelle Zahlen. Mittels

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\,(a_n + \frac{b}{a_n})\,, \quad \text{mit}\, n \in \mathbb{N}\,,$$

und $a_1 > 0$ ist eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert. Es lässt sich zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Quadratwurzel von b konvergiert und

$$\frac{b}{a_n} \leq \sqrt{b} \leq a_n \;\; \text{für alle } n \geq 2$$

gilt.

Beweis

Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner erhalten wir für alle $n \geq 2$:

$$a_n^2 - b = \frac{1}{4}\,(a_{n-1} + \frac{b}{a_{n-1}})^2 - b = \frac{1}{4}\,(a_{n-1} - \frac{b}{a_{n-1}})^2 \geq 0\,.$$

Daher gilt

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\,(a_n + \frac{b}{a_n}) = \frac{1}{2a_n}\,(a_n^2 - b) \geq 0\,.$$

Demnach ist $(a_n)_{n\geq 2}$ eine nach unten beschränkte monoton fallende Folge und es gilt

$$\sqrt{b} \leq a_n \;\; \text{für alle } n \geq 2\,.$$

Aus $a_n^{-2} \leq b^{-1}$ folgt für $c_n := \frac{b}{a_n}$ die Ungleichung

$$c_n^2 \leq b \;\; \text{für alle } n \geq 2$$

und damit

$$\frac{b}{a_n} \leq \sqrt{b} \;\; \text{für alle } n \geq 2\,.$$

Anmerkung

Statt

$$\frac{b}{a_n} \leq \sqrt{b} \leq a_n \text{ für alle } n \geq 2$$

können wir auch

$$\frac{b}{a_n^2} \leq 1 \text{ für alle } n \geq 2$$

schreiben.

Weiterhin zeigt

$$c_n \leq c_{n+1} \text{ für alle } n \geq 2\,,$$

dass $(c_n)_{n\geq 2}$ eine monoton steigende Folge ist. Zusätzlich gilt

$$b \leq a_n^2 \quad \Rightarrow \quad c_n \leq a_n \text{ für alle } n \geq 2\,,$$

Bisher wissen wir, dass $(a_n)_{n\geq 2}$ eine monoton fallende und beschränkte Folge mit

$$c_2 \leq a_n \text{ (und } a_n \leq a_2)$$

ist. Demnach konvergiert diese Folge, und für deren Grenzwert a gilt

$$a \geq c_2 > 0\,.$$

Außerdem erhalten wir

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + \frac{b}{a_n}) = \frac{1}{2}(a + \frac{b}{a})$$

und daher

$$a^2 = b\,.$$

Beispiel

Der Wert von $\sqrt{3}$ zum Startwert $a_1 = 1$

n	a_n	$c_n := \frac{b}{a_n}$
1	1,0	3,0
2	2,0	1,5
3	1,75	1,714 285 714
4	1,732 142 857	1,731 958 763
5	1,732 050 810	1,732 050 805

Zum Vergleich: $\sqrt{3} \approx 1{,}732\,050\,808$.

Es gilt außerdem

$$\frac{b}{a_n} \leq \sqrt{b} \leq a_n \quad \text{für alle } n \geq 2\,.$$

Überdies konvergieren die beiden Folgen

$$(\frac{b}{a_n})_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

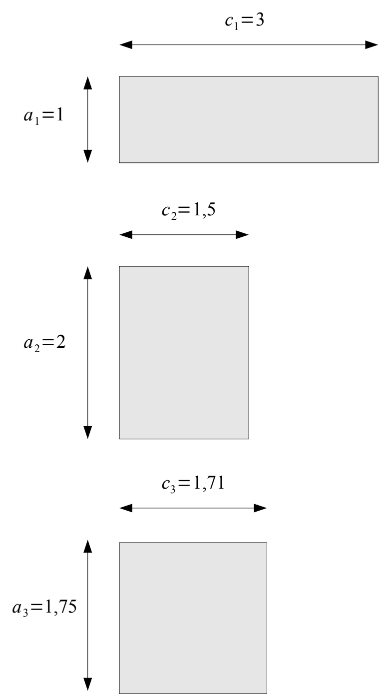


Abbildung 4.7 Konvergenz der Seitenlängen

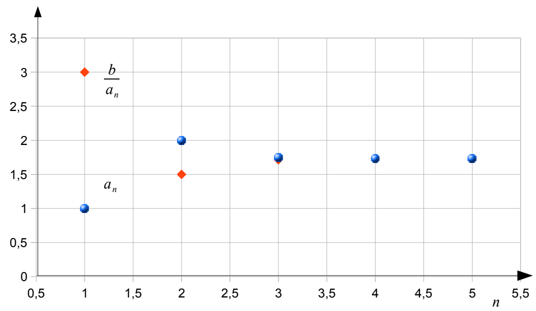


Abbildung 4.8 Zur Konvergenz von $(\frac{b}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Anmerkung

Seien a und b positive reelle Zahlen und

$$a^k = b\,,\ k \in \mathbb{N} : k \geq 2\,.$$

Durch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_{n+1} := \frac{1}{k}((k-1)a_n + \frac{b}{a_n^{k-1}})\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

und $a_1 > 0$ ist eine rekursiv definierte Folge erklärt, die gegen a konvergiert.

4.1.2 Reihen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge der Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k\,, \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_0\,,$$

heißt (unendliche) Reihe und wird mit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet.

Konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, so wird ihr Grenzwert ebenfalls mit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet.

Beispiele für Summenformeln

(1) Für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt die Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(2) Für eine arithmetische Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erhalten wir die Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

(3) Für die geometrische Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erhalten wir die Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Diese Beispiele geben Summenformeln für $\sum\limits_{k=1}^{n} a_n$ wieder. Dabei sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmetische bzw. geometrischen Folgen. Die Folge der Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k\,, 1 \leq n \leq N\,,$$

mit festem $N \in \mathbb{N}_0$, lässt sich auch als *endliche Reihe* bezeichnen.

(1) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine arithmetische Folge, so heißt $(s_n)_{1\leq n\leq N}$ (endliche) *arithmetische Reihe*.

(2) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine geometrische Folge, so heißt $(s_n)_{1\leq n\leq N}$ (endliche) *geometrische Reihe*.

Heben wir die Beschränkung auf, dass, bei arithmetischer und geometrischer Reihe, n ein fester endlicher Wert ist, so können wir auch *unendliche* arithmetische und geometrische Reihen untersuchen.
Während die arithmetische Reihe für $n \to \infty$ divergiert, gibt es bei der geometrischen Reihe auch konvergente Folgen von Partialsummen, d. h. eine *konvergente unendliche geometrische Reihe*.

Sei $|q| < 1$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 \frac{1}{1-q}$$

Wir können auch rein- und gemischtperiodische Dezimalbrüche mittels Reihen zu gewöhnlichen Brüchen umformen. Beispielsweise gilt

$$0,2\overline{56} = \frac{1}{10}(2 + \frac{56}{10^2 - 1})\,.$$

Das lässt sich in verallgemeinerter Form folgendermaßen beweisen:

Ist

$$\frac{m}{n} = 0,\overline{q_1 q_2 ... q_s} \ \text{ und } \ P := q_1 q_2 ... q_s = q_1 10^{s-1} + q_2 10^{s-2} + ... + q_s 10^0\,,$$

so gilt

$$\frac{m}{n} = 0 + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + ... + \frac{q_s}{10^s} + \frac{q_1}{10^{s+1}} + \frac{q_2}{10^{s+2}} + ...$$

und daher

$$\frac{m}{n} 10^s = (q_1 10^{s-1} + q_2 10^{s-2} + ... + q_s) + \frac{m}{n} = P + \frac{m}{n}\,.$$

Demnach können wir

$$\frac{m}{n} = \frac{P}{10^s - 1}$$

schreiben.

Um die Konvergenz von Reihen allgemein behandeln zu können, befassen wir uns im nächsten Abschnitt mit einigen Konvergenzkriterien.

Konvergenzkriterien für Reihen

Allgemeines Cauchysches Konvergenzkriterium

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

genau dann, wenn sie einen Cauchy-Folge ist, d. h., wenn gilt:
Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \epsilon \text{ für alle } n \geq m \geq N\,.$$

Eine notwendige, aber nicht hinreichende, Bedingung für die Konvergenz einer Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

ist, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Beweis: Da eine konvergente Folge auch Cauchy-Folgen ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \epsilon \text{ für alle } n \geq m \geq N\,.$$

Hieraus folgt insbesondere, dass

$$|a_n| < \epsilon \text{ für alle } n \geq N\,.$$

Besteht eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ nur aus nicht-negativen Reihengliedern a_n, so ist die Reihe genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

Dieses Ergebnis lässt sich leicht zeigen, da die Folge der Partialsummen monoton wachsend ist.
Eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

konvergiert.

Konvergiert eine Reihe absolut, so konvergiert sie auch im gewöhnlichen Sinne.

Umgekehrt ist eine konvergente Reihe jedoch nicht notwendigerweise absolut konvergent, wie sich beispielsweise bei der alternierenden harmonischen Reihe zeigt.
Anders als für endliche Summen ist es nicht selbstverständlich, dass eine konvergente Reihe nach Umordnung noch konvergent ist und der Grenzwert durch die Umordnung nicht verändert wird. In diesem Zusammenhang ist es wichtig, dass die Reihe absolut konvergiert.

Definition: Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Ist $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, so heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$$

eine *Umordnung* der gegebenen Reihe.

Ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe mit dem Grenzwert g, so konvergiert jede Umordnung der Reihe ebenfalls gegen g.

Auch für den folgenden Satz genügt die bloße Konvergenz der Reihen nicht. Vielmehr wird absolute Konvergenz gefordert.

Das Cauchy-Produkt von Reihen

Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen. Wir setzen

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\,.$$

Dann ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)\,.$$

Mit Hilfe des Cauchy-Produktes lässt sich auch die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)\,, \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}\,,$$

herleiten.

So erhalten wir, mit

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,,\ \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\,,$$

$$a_n = \frac{x^n}{n!}\,,\ b_n = \frac{y^n}{n!}\,,$$

die Werte

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{y^k}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \frac{1}{n!}(x+y)^n\,.$$

Dabei wurde der *binomische Lehrsatz*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k\,, \quad x, y \in \mathbb{R}\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

verwendet.

Quotientenkriterium

(A) Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq N$.

- Existiert eine Zahl $\theta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \theta < 1$, so dass

  $$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \theta\,, \quad \text{für alle } n \geq N\,,$$

  gilt, dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut. Das bedeutet, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Daher konvergiert auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

- Gilt hingegen

  $$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1\,, \quad \text{für alle } n \geq N\,,$$

  so divergiert die Reihe.

(B) Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n > 0$. Ferner existiere der Grenzwert

$$q := \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \,.$$

- Ist $q < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
- Ist $q > 1$, so divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
- Für $q = 1$ ist eine entsprechende Aussage nicht möglich.

Anmerkung: Die Aussage zur Divergenz lässt sich einfach zeigen, da die Folgeglieder einer konvergenten Reihe gegen Null konvergieren.

Beispiele

- Die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$
konvergiert, da
$$q = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^n}{n \cdot 2^{n+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n\cdot 2} = \frac{1}{2} < 1 \,.$$
- Die harmonische Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
divergiert, wie wir noch zeigen werden. Zwar gilt
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1 \,, \quad \text{für alle } n \geq 1 \,,$$
aber es gibt kein $\theta < 1$ mit
$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \theta \,, \quad \text{für alle } n \geq N \,.$$
Das Quotientenkriterium ist für Reihen der Form
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \,, \quad \text{mit } k \in \mathbb{N} \,,$$
nicht anwendbar.

Majorantenkriterium

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit

$$c_n \geq 0 \;\text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$|a_n| \leq c_n \;\text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ und daher $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Beweis: Da die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert, ist diese Folge der Partialsummen auch eine Cauchy-Folge.

Daher existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$\left|\sum_{k=m}^{n} c_k\right| < \epsilon \;\text{ für alle } n \geq m \geq N \,.$$

Demnach gilt

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} c_k < \epsilon \;\text{ für alle } n \geq m \geq N \,.$$

Mit dem allgemeinen Cauchyschen Konvergenzkriterium ist die Behauptung bewiesen.

Anmerkungen

- Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt *Majorante* von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.
- Bildet stattdessen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ eine divergente Reihe mit $c_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_n \geq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dann divergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Beispiele

- Zwar konvergieren die Reihenglieder der harmonischen Reihe

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

  gegen Null, jedoch divergiert die harmonische Reihe.

  Anmerkung: Das Quotientenkriterium kann hier nicht angewendet werden.

  Beweis: Um die Folge der Partialsummen

  $$(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n})_{m\in\mathbb{N}}$$

  nach unten abzuschätzen, betrachten wir die Partialsummen

  $$s_{2^{k+1}} = \sum_{n=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{k} \left(\sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}} \frac{1}{n} \right)$$

  $$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + ... + \left(\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n} \right)$$

  Die Summe jeder dieser Terme in Klammern ist größer oder gleich $\frac{1}{2}$. Somit folgt

  $$s_{2^{k+1}} \geq 1 + \frac{k}{2}\,.$$

  Das bedeutet aber, dass die Folge der Partialsummen unbeschränkt ist.

- Die Reihe

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

  divergiert, da

  $$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}\,, \quad \text{für alle } n \geq 1\,,$$

  gilt und die harmonische Reihe divergiert.

- Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^k}$, mit $k \in \mathbb{N} : k \geq 2$, konvergiert.

  Begründung: $\sum\limits_{n=1}^{m} \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{m}{m+1}$ und Anwendung des Majorantenkriteriums.

- Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

konvergiert, da

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^n} \leq 1 + \sum_{n=2}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \text{für alle } m \geq 2\,,$$

gilt, die geometrische Reihe mit $|q| < 1$ konvergiert und daher eine Majorante existiert.

Grenzwertkriterium

Seien $a_n > 0$ und $b_n > 0$, für $n \in \mathbb{N}_0$. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = q\,,$$

wobei $0 < q < \infty$, so sind die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

entweder beide konvergent oder beide divergent.

Beispiele

- Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}$ divergiert, da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n^2}} = 1$$

gilt und die harmonische Reihe divergiert.

- Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+\cos n}$ konvergiert, da, mit $|\cos n| \leq 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^3+\cos n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+\cos n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{\cos n}{n^3}} = 1$$

gilt und die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Wurzelkriterium

(A) Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \geq 0$.

- Existiert eine Zahl $\theta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \theta < 1$ und ein $N \in \mathbb{N}_0$, so dass

  $$\sqrt[n]{a_n} \leq \theta < 1 \quad \text{für alle } n \geq N$$

  gilt, dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

- Gilt hingegen

  $$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \quad \text{für alle } n \geq N\,,$$

  so divergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Anmerkungen

- Die Aussage zur Divergenz lässt sich einfach zeigen, da die Folgeglieder einer konvergenten Reihe gegen Null konvergieren.
- Sind die Folgeglieder der Reihe nicht alle positiv, so lässt sich stattdessen die Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ behandeln.

(B) Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \geq 0$. Hat die Folge

$$(\sqrt[n]{a_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$$

einen Grenzwert g, so ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$

- für $g < 1$ konvergent
- für $g > 1$ divergent.

Anmerkungen

- Für $g = 1$ ist eine entsprechende Schlußfolgerung nicht möglich.
- Beispielsweise gilt

  $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,,$$

  $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\,, \quad \text{für } a > 0\,.$$

  Diese Gleichungen lassen sich folgendermaßen beweisen:

  Wir erhalten

  $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (\exp(\frac{1}{n}\ln n)) = \exp \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}\ln n)\,,$$

  da die Exponentialfunktion stetig ist. Außerdem gilt

  $$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}\ln n) = 0\,,$$

  was sich beispielsweise mit der Regel von de l'Hospital zeigen lässt.

  $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} (\exp(\frac{1}{n}\ln a)) = \exp \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}\ln a) = \exp(0) = 1\,,$$

  da die Exponentialfunktion stetig ist.

Beispiel

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n)^{n+1}}{n^{2n}}$$

konvergiert, da

$$g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(5n)^{n+1}}{n^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} (\frac{5n}{n^2} \cdot \sqrt[n]{5} \cdot \sqrt[n]{n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0 < 1\,.$$

Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Folge mit $a_n \geq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Beweis: Für die Partialsumme

$$s_k := \sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n$$

gilt

$$s_{2k+2} - s_{2k} = -a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq 0$$

und daher

$$s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \ldots \geq s_{2k} \geq s_{2k+2} \geq \ldots .$$

Entsprechend gilt

$$s_{2k+3} - s_{2k+1} = a_{2k+2} - a_{2k+3} \geq 0$$

und daher

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \ldots \leq s_{2k+1} \leq s_{2k+3} \leq \ldots .$$

Überdies gilt

$$s_{2k+1} - s_{2k} = -a_{2k+1} \leq 0$$

und somit

$$s_{2k+1} \leq s_{2k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0 .$$

Die Folge $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend und, wegen

$$s_{2k} \geq s_1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0 ,$$

nach unten beschränkt. Daher konvergiert die Folge und der Grenzwert

$$S := \lim_{k\to\infty} s_{2k}$$

existiert.

Die Folge $(s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton wachsend und, wegen

$$s_{2k+1} \leq s_0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0 ,$$

nach oben beschränkt. Daher konvergiert die Folge und der Grenzwert

$$\tilde{S} := \lim_{k\to\infty} s_{2k+1}$$

existiert. Die beiden Grenzwerte S und $\tilde{S}$ sind identisch, da

$$S - \tilde{S} = \lim_{k\to\infty} (s_{2k} - s_{2k+1}) = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0\,.$$

Demnach gibt es für alle $\epsilon > 0$ Zahlen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$|s_{2k} - S| < \epsilon \ \text{ für alle } k \geq N_1$$

und

$$|s_{2k+1} - S| < \epsilon \ \text{ für alle } k \geq N_2\,.$$

Setzen wir $N := \max(2N_1, 2N_2 + 1)$, so gilt

$$|s_n - S| < \epsilon \ \text{ für alle } n \geq N\,.$$

Beispiele

- Die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.
- Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$, mit $k \in \mathbb{N} : k \geq 2$, konvergiert.
- Die alternierende harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergiert.
  Begründung: Leibniz-Kriterium.
- Die unendliche geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, für $|x| < 1$, konvergiert.
  Begründung: Es gilt $\sum\limits_{n=0}^{m} x^n = \dfrac{1 - x^{m+1}}{1 - x}$ für $x \in \mathbb{R} : x \neq 1$
  und daher $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$.
- Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |x|^n$, mit $|x| < 1$ konvergiert.
  Begründung: Quotientenkriterium
- Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ konvergiert für $x \in \mathbb{R}$.
  Begründung: Quotientenkriterium, Wurzelkriterium.

Leonhard Euler veröffentlichte 1734 eine Arbeit, die beispielsweise folgende Konvergenzwerte enthielt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\,.$$

4.2 Stetigkeit von Funktionen

Definition: Grenzwerte bei Funktionen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion auf $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ ein Punkt derart, dass es mindestens eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $a_n \in D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gibt.

Wir schreiben

$$\lim_{x\to a} f(x) = c\,,$$

falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $x_n \in D$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c\,.$$

Rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert: Gilt für die Folgeglieder $x_n > a$ ($x_n < a$), so erhalten wir den rechtsseitigen (linksseitigen) Grenzwert.

Anmerkung: Selbstverständlich können wir statt $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, mit $x > a$, auch

$$\lim_{h\to 0} f(a+h)\,,$$

und entsprechend

$$\lim_{h\to 0} f(a-h)$$

für den linksseitigen Grenzwert, schreiben.

Definition: Stetigkeit

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$. Die Funktion heißt *stetig im Punkt* a, falls

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\,.$$

f heißt *stetig in* D, falls f in jedem Punkt von D stetig ist.

Beispiele für stetige und unstetige Funktionen

Die Betragsfunktion

$$\text{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto |x|$$

ist stetig.

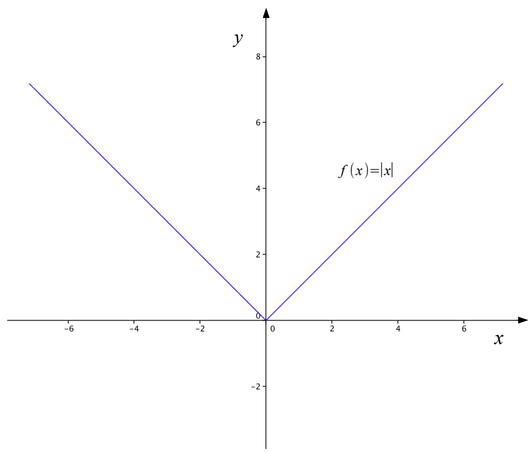


Abbildung 4.9 Die Betragsfunktion

Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

ist in x_0 rechtsseitig, aber nicht linksseitig stetig und daher unstetig.

Die entier-Funktion

$$\text{entier} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto [x]$$

ist nicht stetig.

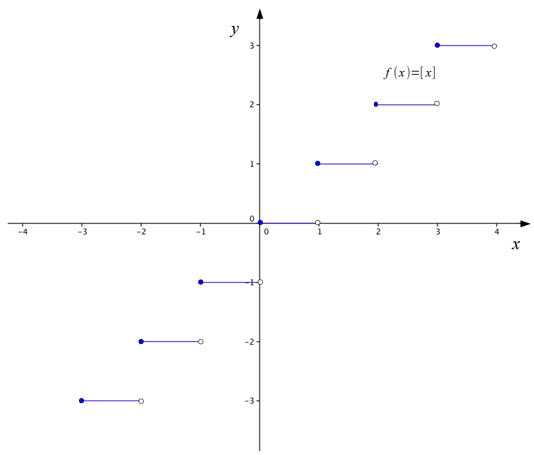


Abbildung 4.10 Die entier-Funktion

Das ϵ-δ-Kriterium der Stetigkeit: Sei $D \subset \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $x_0 \in D$ stetig, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \;\text{ für alle }\; x \in D \text{ mit } \; |x - x_0| < \delta\,.$$

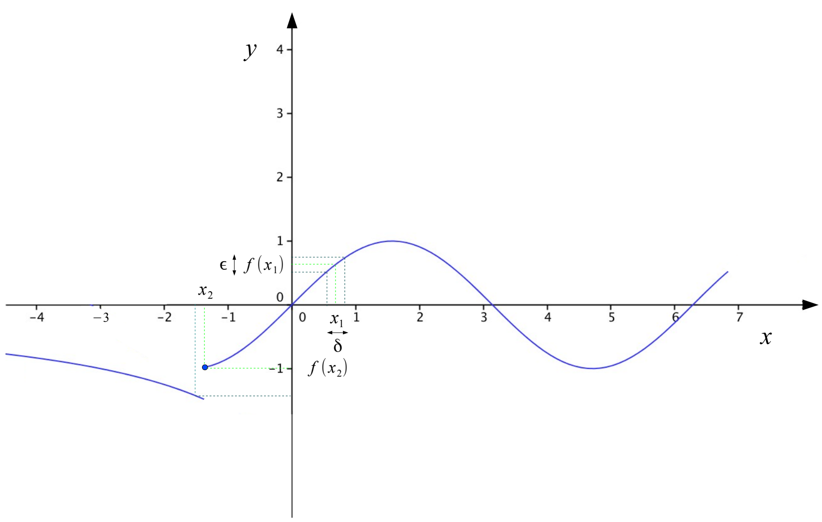


Abbildung 4.11 Das ϵ-δ-Kriterium der Stetigkeit

Sätze über stetige Funktionen

Zwischenwertsatz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (bzw. $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$). Dann existiert ein $p \in [a,b]$ mit $f(p) = 0$.

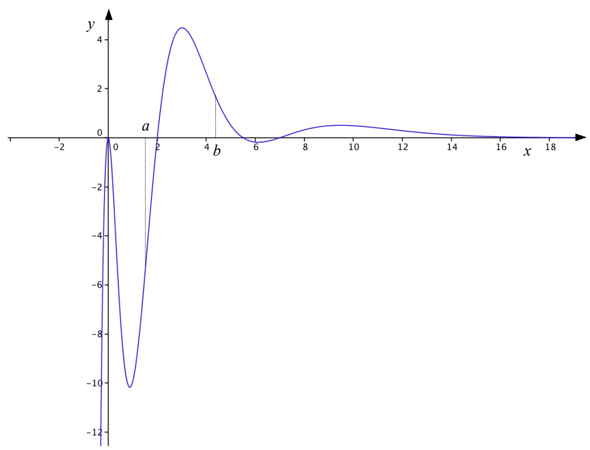


Abbildung 4.12 Existenz einer Nullstelle

Folgerung: Sei $f : [a,b] \to R$ eine stetige Funktion und c eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann existiert ein $p \in [a,b]$ mit $f(p) = c$.

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn sie obere und untere Schranken besitzt, d.h. wenn ein $M \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$|f(x)| \leq M \quad \text{für alle } x \in D\,.$$

Jede in einem abgeschlossenen beschränkten Intervall stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt ihr Maximum und Minimum an, d. h. es gibt $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \text{für alle } x \in [a,b]\,.$$

4.3 Der Differentialquotient

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Außerdem existiere eine Folge $(\xi_n) \subset D \backslash \{x\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = x$. Dann heißt die Funktion f in einem Punkt $x \in D$ *differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in D\backslash\{x\}}} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

in $\mathbb{R}$ existiert. Dieser Grenzwert $f'(x)$ heißt *Differentialquotient* oder *Ableitung* von f im Punkte x. Die Funktion f heißt *differenzierbar in* D, falls f in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar ist.
Der Differenzenquotient

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

ist die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(\xi, f(\xi))$ des Graphen von f.

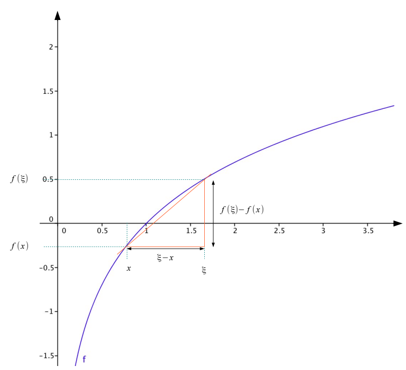


Abbildung 4.13 Die Steigung der Sekante

Existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten für $\xi \to x$, so geht bei diesem Grenzübergang die Sekante in die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x, f(x))$ über.

Statt $f'(x)$ ist auch die Schreibweise $\dfrac{df(x)}{dx}$ üblich.

Beispiele zur Berechnung der Ableitung

- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$. Dann gilt

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x\,.$$

- Sei $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x}$. Dann gilt

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right)$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x - (x+h)}{h(x+h)x} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}\,.$$

- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \exp x$. Dann gilt

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x) \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h}\,.$$

  Da

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,,$$

  erhalten wir

$$f'(x) = \exp(x)\,.$$

- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$. Dann gilt

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h}$$
$$= \left(\lim_{h\to 0} \cos(x+\frac{h}{2})\right) \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)\,.$$

  Da die Funktion $\cos$ stetig ist, erhalten wir

$$\lim_{h\to 0} \cos(x+\frac{h}{2}) = \cos x\,.$$

  Weiterhin gilt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

  Das ergibt schließlich

$$f'(x) = \cos x\,.$$

Die Betragsfunktion

$$\text{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto |x|$$

ist stetig, jedoch nicht differenzierbar.

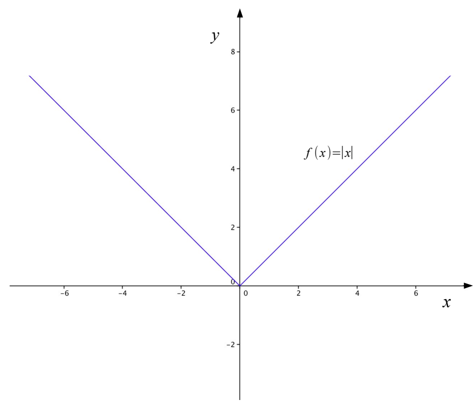


Abbildung 4.14 Die Betragsfunktion

Beweis: Die Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$h_n := (-1)^n \frac{1}{n} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

konvergiert gegen Null. Für

$$q_n := \frac{abs(0+h_n) - abs(0)}{h_n}$$

gilt

$$q_n = \frac{\frac{1}{n} - 0}{(-1)^n \frac{1}{n}} = (-1)^n\,.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} q_n$ nicht existiert, ist die Funktion abs im Nullpunkt nicht differenzierbar.

Wie bei der rechtsseitigen und linksseitigen Stetigkeit, lassen sich auch entsprechende Differentialquotienten einführen.

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$ und

$$f : D \to \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt f im Punkt x *von rechts differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'_+(x) := \lim_{\xi \searrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

existiert. Die Funktion f heißt im Punkt x *von links differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'_-(x) := \lim_{\xi \nearrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

existiert.

Beispiel: Die Funktion abs ist im Nullpunkt zwar nicht differenzierbar, jedoch sowohl von rechts als auch von links differenzierbar, wobei

$$\text{abs}'_+(0) = +1 \quad \text{und} \quad \text{abs}'_-(0) = -1\,.$$

Während aus der Stetigkeit einer Funktion nicht deren Differenzierbarkeit folgt, impliziert jedoch umgekehrt die Differenzierbarkeit einer Funktion deren Stetigkeit.

Satz: Ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbar, so ist sie in x auch stetig.

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt in $x \in D$ *stetig differenzierbar*, wenn sie in x differenzierbar und der Differentialquotient f' in x stetig ist.

4.4 Ableitungsregeln

Produktregel

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbare Funktionen. Dann ist auch die Funktion

$$f \cdot g : D \to \mathbb{R}$$

in $x \in D$ differenzierbar, und es gilt

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,.$$

Quotientenregel

Ist $g(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in D$, so ist auch die Funktion

$$\frac{f}{g} : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

in $x \in D$ differenzierbar und es gilt

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}\,.$$

Beispiel

Für die Funktion

$$\tan : \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \tan x$$

erhalten wir

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Ferner sei

$$f : D \to \mathbb{R}$$

eine stetige und streng monotone Funktion und

$$\varphi = f^{-1} : D^* \to \mathbb{R}\,, \;\text{ mit } D^* = f(D)\,,$$

deren Umkehrfunktion.

Ist f im Punkt $x \in D$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, so ist φ im Punkt $y := f(x)$ differenzierbar und es gilt

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\varphi(y))}\,.$$

Beispiel

Die Funktion $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Daher gilt

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}\,.$$

Kettenregel

Seien $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$. Die Funktion f sei im Punkt $x \in D$ und g im Punkt $f(x) \in E$ differenzierbar. Dann ist die zusammengesetzte Funktion

$$g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

im Punkt $x \in D$ differenzierbar, und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)\,.$$

Beispiel

Sei $a \in \mathbb{R}$ und

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^a\,.$$

Mit $x^a = \exp(a \ln x)$ und der Anwendung der Kettenregel erhalten wir

$$\frac{dx^a}{dx} = \exp'(a\ \ln x)\frac{d}{dx}(a\ \ln x) = \exp(a \ln x)\frac{a}{x} = a\,x^{a-1}\,.$$

Ableitungen höherer Ordnung

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ in $D \cap (x - \epsilon, x + \epsilon)$ und $f' : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbar. Demnach existiert der Grenzwert $(f')'(x)$. Die Ableitung $(f')'(x)$ wird als *zweite Ableitung* von f in x bezeichnet. Gebräuchlich ist die Schreibweise

$$f''(x) := (f')'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)\,.$$

Allgemein lassen sich so k-te Ableitungen einführen.

Definition: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt k-mal differenzierbar im Punkt $x \in D$, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass f in $D \cap (x - \epsilon, x + \epsilon)$ $(k-1)$-mal differenzierbar und die $(k-1)$-te Ableitung von f in x differenzierbar ist. Gebräuchlich ist die Schreibweise

$$f^{(k)}(x) := (f^{(k-1)})'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{k-1}f(x)}{d^{k-1}x}\right) = \frac{d^k f(x)}{dx^k} = \left(\frac{d}{dx}\right)^k f(x)\,.$$

Ableitungen einiger Funktionen

Die Ableitung der konstanten Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) = c$$

ist

$$f'(x) = 0\,.$$

Die Ableitung der Potenzfunktion

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) = x^a, \text{ mit } a \in \mathbb{R}\,,$$

ist

$$f'(x) = a\,x^{a-1}.$$

Trigonometrische Funktionen

Die Ableitung der $\sin$-Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) = \sin x$$

ist

$$f'(x) = \cos x\,.$$

Die Ableitung der $\cos$-Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) = \cos x$$

ist

$$f'(x) = -\sin x\,.$$

Die Ableitung der $\tan$-Funktion

$$f : \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) = \tan x$$

ist

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Die Ableitung der $\cot$-Funktion

$$f : \mathbb{R}\backslash\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) = \cot x$$

ist

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}\,.$$

Exponentialfunktionen

Die Ableitung der $\exp$-Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) = e^x$$

ist

$$f'(x) = e^x\,.$$

Sei $a \in \mathbb{R}_+^*$. Die Ableitung der Exponentialfunktion zur Basis a

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) = a^x$$

ist

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\exp(x \ln a) = \exp(x \ln a) \cdot \frac{d}{dx}(x \ln a) = a^x \cdot (\ln a)\,.$$

Hyperbelfunktionen

Die Ableitung der $\sinh$-Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) = \sinh x$$

ist

$$f'(x) = \cosh x\,.$$

Die Ableitung der $\cos$-Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) = \cosh x$$

ist

$$f'(x) = \sinh x\,.$$

4.5 Lokale Extrema und der Mittelwertsatz

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge und $f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f besitzt in $x \in D$ ein *lokales Maximum (Minimum)*, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass

$$f(x) \geq f(\xi) \text{ (bzw. } f(x) \leq f(\xi)) \quad \text{für alle } \xi \text{ mit } |x - \xi| < \epsilon \,.$$

Dieser Extremwert wird als *isoliertes lokales Maximum (Minimium)* bezeichnet, wenn $f(x) \neq f(\xi)$ in einer beliebig kleinen Umgebung von ξ ist.

Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge und $f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f besitze in D ein *lokales Extremum* und sei in x differenzierbar. Dann gilt $f'(x) = 0$.

Der *Satz von Rolle* besagt, dass beispielsweise zwischen zwei Nullstellen einer Funktion eine Nullstelle der Ableitung liegt.

Satz von Rolle: Sei $a < b$. Ferner sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und in (a, b) differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Eine Folgerung des *Satzes von Rolle* ist der folgende Mittelwertsatz.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und in (a, b) differenzierbare Funktion. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$, so dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \,.$$

Das bedeutet, dass die Steigung der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ gleich der Steigung der Tangente an den Graphen von f an einer Stelle $(\xi, f(\xi))$ mit $\xi \in (a, b)$ ist.

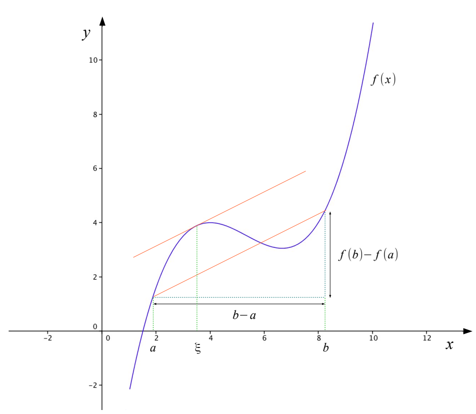


Abbildung 4.15 Die Sekantensteigung und $f'(\xi)$

Mit Hilfe der Ableitung lassen sich die Monotoniebereiche und damit die Extrema bestimmen.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und in (a, b) differenzierbare Funktion. Gilt

- $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) > 0$) für alle $x \in (a, b)$, so ist f in $[a, b]$ (streng) monoton wachsend,
- $f'(x) \leq 0$ ($f'(x) < 0$) für alle $x \in (a, b)$, so ist f in $[a, b]$ (streng) monoton fallend.

Beispiel: Monotoniebereiche und Extremwerte

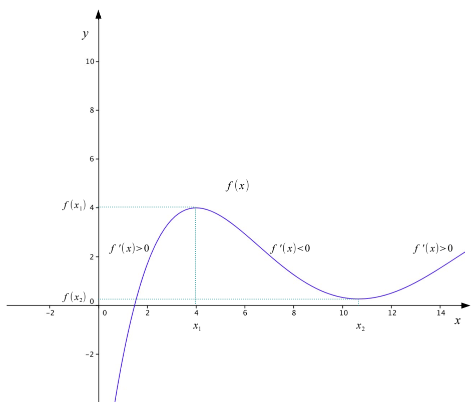


Abbildung 4.16 Monotoniebereiche und Extremwerte

Eine hinreichende Bedingung für ein isoliertes lokales Extremum bietet der folgende Satz:

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die im Punkt $x \in (a, b)$ zweimal differenzierbar ist. Gilt

$$f'(x) = 0 \ \text{ und } \ f''(x) > 0 \ (\text{bzw. } f''(x) < 0)\,,$$

so besitzt f in x ein *isoliertes lokales Minimum* (bzw. *Maximum*).

4.6 Funktionenfolgen

Gegeben seien eine Menge K und Funktionen $f_n : K \to \mathbb{C}$, mit $n \in \mathbb{N}_0$.

K kann beispielsweise $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ oder ein Intervall in $\mathbb{R}$ sein.

Dann können wir $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ punktweise als Zahlenfolgen auffassen.

Die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt Funktionenfolge.

Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert *punktweise* gegen einen Funktion $f : K \to \mathbb{C}$, falls für alle $x \in K$ und für alle $\epsilon > 0$ ein $N = N(x, \epsilon)$ exsitiert, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \text{ für alle } n \geq N .$$

Bei gleichmäßiger Konvergenz einer Funktionenfolge muss die für die punktweise Konvergenz geforderte Eigenschaft hinsichtlich $N = N(\epsilon)$ gelten, d.h. N darf nicht von x abhängen.
Die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert *gleichmäßig* gegen einen Funktion $f : K \to \mathbb{C}$, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $N = N(\epsilon)$ exsitiert, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \text{ für alle } x \in K \text{ und alle } n \geq N .$$

Konvergiert eine Funktionenfolge gleichmäßig, so konvergiert sie auch punktweise.

Beispiel zur punktweisen Konvergenz von Funktionenfolgen

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f_n(x) = x^n\,.$$

Obwohl die Funktionen f_n stetig sind, ist

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

unstetig, wobei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{für} \quad x = 1\,. \end{cases}$$

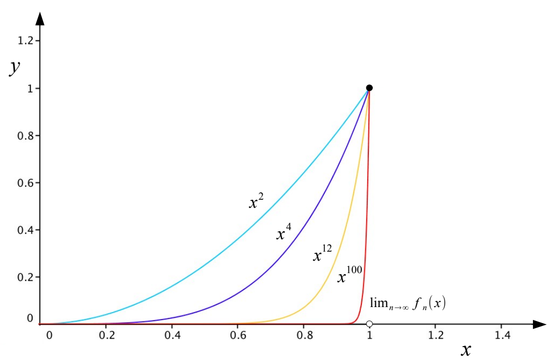


Abbildung 4.17 Punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen

Allerdings bietet die gleichmäßige Konvergenz ein Kriterium, das die Stetigkeit des Limes $f(x)$ gewährleistet.

Sei $f_n : K \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen die Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ konvergiere. Dann ist auch f stetig.

4.7 Potenzreihen

Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge komplexer Zahlen, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Besitzen die Folgeglieder f_n der Funktionenfolge $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Form

$$f_n(z) = c_n(z - z_0)^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0\,,$$

so bezeichnen wir die zugehörige Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

als *Potenzreihe*.

Definition: Ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

eine Potenzreihe, so heißt

$$r := \sup\{|z - z_0| \mid \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \text{ konvergiert}\,\}$$

Konvergenzradius der Potenzreihe.

Eine reelle Zahl heißt

- *Supremum sup*, falls sie die kleinste obere und
- *Infimum inf*, falls sie die größte untere Schranke ist.

Es gilt $r \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Beispiel

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$f_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto x^n\,.$$

Dann konvergiert die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ und

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,.$$

Sei $\rho \in \mathbb{R}$ und

$$B(z_0, \rho) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \rho\} .$$

Falls die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

für ein $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 \neq z_0$ konvergiert, so konvergieren diese Potenzreihe und die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}$$

absolut und gleichmäßig auf $B(z_0, \rho)$ mit $0 < \rho < |z_1 - z_0|$.

Entweder konvergiert die Potenzreihe absolut auf ganz $\mathbb{C}$ oder es gibt eine reelle Zahl $r \in [0, \infty)$, so dass die Potenzreihe

- auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ absolut konvergiert und
- auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r\}$ divergiert.

Anmerkung: Entsprechende Aussagen gelten für Potenzreihen in $\mathbb{R}$.

Berechnung des Konvergenzradius

Gegeben sei eine Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n , \quad \text{mit } x \in \mathbb{R} .$$

Existiert

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g ,$$

so gilt für den Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{g} .$$

Existiert

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q ,$$

so gilt für den Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{q} .$$

Anmerkung: Die Aussagen lassen sich mit Hilfe des Wurzel- bzw. Quotientenkriteriums beweisen.

Beispiele

- Die Exponential-Reihe

  $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

  ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent, da mit $f_n(x) := \dfrac{x^n}{n!}$, für alle $n \geq 2|x|$:

  $$\left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{1}{2}\,.$$

  Nach dem Quotientenkriterium ist demnach die Behauptung bewiesen.
  Für den Konvergenzradius erhalten wir daher $r = \infty$.

  Anmerkung: Es gilt

  $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = 0\,.$$

  Wir können den Konvergenzradius aber auch, wie oben, mittels der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bestimmen:

  So erhalten wir, mit $a_n := \dfrac{1}{n!}$,

  $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0\,,$$

  woraus $r = \infty$ folgt.

- Für den Konvergenzradius der Reihe

  $$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

  erhalten wir $r = 1$, da für $f_n(x) := nx^n$

  $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n}\,|x|) = |x|$$

  ist.

  Das Ergebnis für den Konvergenzradius lässt sich aber auch mittels

  $$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \quad \text{mit } a_n := n$$

  zeigen.

Im folgenden Satz formulieren wir, dass sich konvergente reelle Potenzreihen gliedweise differenzieren lassen.

Sei $a_n, x, x_0 \in \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $r > 0$.

Dann gilt für alle $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}\,.$$

4.8 Approximation durch affin-lineare Funktionen

Die Differenzierbarkeit einer Funktionen kann auch durch die Approximierbarkeit mittels affin-linearer Funktionen ausgedrückt werden.

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in D$ ein Punkt, der Grenzwert mindestens einer Punktfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D\backslash\{a\}$ ist. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann im Punkt a differenzierbar, wenn eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$f(x) = f(a) + c(x-a) + \varphi(x) \quad \text{für } x \in D\,,$$

wobei $\varphi : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x\in D\backslash\{a\}}} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0$$

ist. In diesem Fall gilt $c = f'(a)$. Der Graph unserer affin-linearen Funktion

$$L(x) = f(a) + c(x-a)$$

ist die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$.

Beispiel

Approximation der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) = \sin x$$

in Umgebung des Punktes $a = 0$.

Wir erhalten

x	0,1	0,2	0,3	0,4
$\sin x$	0,09983	0,19867	0,29552	0,38942

Approximation einiger Funktionen in der Umgebung von $a = 0$

Es gilt

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha\, x\,, \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R},$$

$$e^x \approx 1 + x,$$

$$\sin x \approx x,$$

$$\ln(1+x) \approx x.$$

4.9 Taylor-Reihen

Wie wir gesehen haben, kann der Funktionswert einer differenzierbaren Funktion f in der Umgebung einer Stelle a durch

$$f(a) + (x-a)f'(a)$$

näherungsweise bestimmt werden.

Da die Berücksichtigung höherer Ableitungen zu einer verbesserten Approximation von ganzrationalen Funktionen führen kann, stellt sich allgemein die Frage, wann sich Funktionen, zumindest lokal, durch Polynome approximieren lassen.
Eine ganzrationale Funktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \,,$$

lässt sich auch folgendermaßen schreiben

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \,.$$

Ersetzen wir hierbei den Punkt 0 durch den Punkt a, so erhalten wir entsprechend

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \,.$$

Taylorsche Formel: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, x \in I$. Ferner sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x) \,,$$

wobei

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt \,.$$

Die *Lagrangesche Form* dieses Restgliedes $R_{n+1}(x)$ lautet:

Es existiert ein $\xi \in [a, x]$ bzw. $\xi \in [x, a]$, so dass

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,.$$

Mit Hilfe der Taylor-Entwicklung lässt sich folgender Satz beweisen:

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $x \in I$. Ferner sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \eta(x)(x-a)^n\,,$$

wobei $\eta : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$\lim_{x \to a} \eta(x) = 0$$

ist.

Definition

- Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und $a \in I$.
  Dann heißt
  $$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
  Taylor-Polynom n-ter Ordnung von f mit Entwicklungspunkt a.
- Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion und $a \in I$. Dann heißt
  $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
  Taylor-Reihe von f mit Entwicklungspunkt a.

Anmerkungen

- Der Konvergenzradius einer Taylor-Reihe ist nicht notwendigerweise positiv.
- Auch wenn die Taylor-Reihe von f konvergiert, konvergiert sie nicht notwendigerweise gegen f. Beispielsweise gilt für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit

  $$f(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{falls} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0\,, \end{cases}$$

  $f^{(n)}(0) = 0$. Daher konvergiert auch die Taylor-Reihe von f um den Nullpunkt gegen 0.
- Für $x \in I$ konvergiert die Taylor-Reihe von $f(x)$ genau dann gegen $f(x)$, wenn $R_{n+1}(x)$ gegen 0 konvergiert.
- Das Restglied R_{n+1} lässt sich auch folgendermaßen darstellen:
  - *Schlömilchsche Form* von R_{n+1}: Sei $p \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq p \leq n+1$.
    Es existiert ein $\xi \in [a, x]$ bzw. $\xi \in [x, a]$, so dass

    $$R_{n+1}(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{p \cdot n!}(x-\xi)^{n+1-p}(x-a)^p\,.$$

  - *Cauchysche Form* von R_{n+1} (entspricht der vorangegangenen Darstellung im Falle $p = 1$):
    Es existiert ein $\xi \in [a, x]$ bzw. $\xi \in [x, a]$, so dass

    $$R_{n+1}(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a)\,.$$

Beispiele

(1) Wir entwickeln die Funktion

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \sqrt{1+x}\,,$$

für den Entwicklungspunkt $a = 0$, in erster Ordnung.

Es gilt

$$f(0) = 1\,, f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\bigg|_{x=0} = \frac{1}{2}\,.$$

Demnach erhalten wir

$$f(x) = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \eta(x)x \quad \text{mit} \quad \lim_{x\to 0} \eta(x) = 0$$

(2) Die *Exponentialreihe*

Die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

ist definiert als Exponentialreihe, so dass

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \, .$$

Demnach ist die Exponentialreihe die Taylor-Reihe von $\exp$ mit Entwicklungspunkt $a = 0$.

Zur Konvergenz der Taylor-Reihe für $\exp(x)$

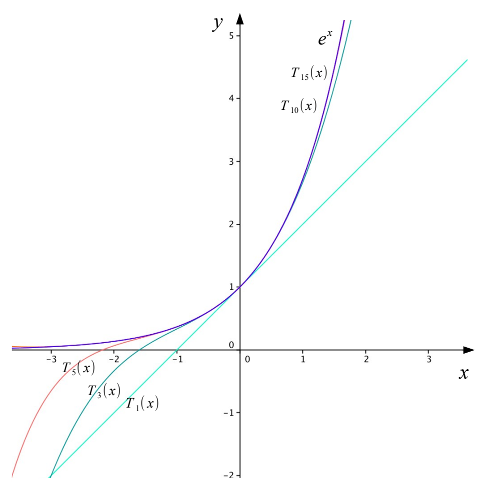


Abbildung 4.18 Approximation von exp durch Taylor-Polynome T_n der Ordnung $n = 1, 3, 5, 10, 15$

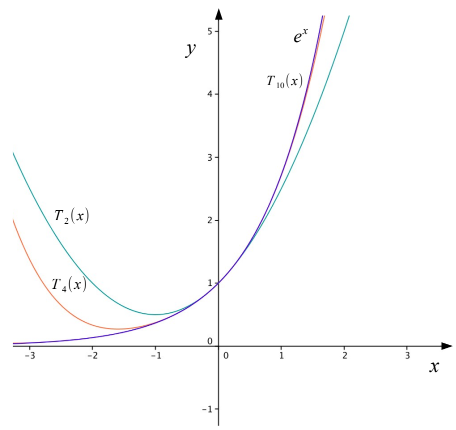


Abbildung 4.19 Approximation von exp durch Taylor-Polynome T_n der Ordnung $n = 2, 4, 10$

(3) Die Taylor-Reihen von Sinus und Cosinus

Die Funktionen $\sin$ und $\cos$ sind gegeben durch

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

und

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \,.$$

Zur Konvergenz der Taylor-Reihe für $\sin(x)$

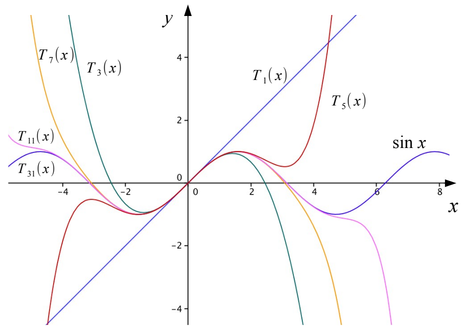


Abbildung 4.20 Approximation von sin durch einige Taylor-Polynome T_n

(4) Die *Logarithmusreihe*

Sei $-1 < x \leq +1$. Dann gilt

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \,.$$

(5) Die *Arcus-Tangens-Reihe*

Sei $|x| \leq 1$. Dann gilt

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \,.$$

(6) Die *Binomische Reihe*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$. Dann gilt

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \,,$$

wobei

$$\binom{\alpha}{n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha - k + 1}{k} \,.$$

4.10 Übungsaufgaben: Differentialrechnung von Funktionen einer reellen Veränderlichen

Aufgabe 1
Untersuchen Sie die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den jeweiligen Grenzwert:

a) $x_n = \dfrac{5n^2+3n-4}{n^3+1}$, b) $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$,

c) $x_n = n((1+\dfrac{1}{n})^2-1)$, d) $x_n = \dfrac{n^3+3}{n+1} - \dfrac{n^5+3n^2}{n^3+n^2+1}$,

e) $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}n^2}{(-1)^{n+1}+n^2}$, f) $x_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2})$, mit $n \geq 2$.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie mit Hilfe der Grenzwertregeln die folgenden Grenzwerte

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\frac{4n+2}{5n-1})(\frac{3}{2}+\frac{3}{n+1})$, b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\frac{5+3n-5n^2}{2n^2-2})$, c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)$,

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1)$, e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{3n})^{2n}$.

Hinweis zu e): Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e\,.$$

Aufgabe 3
Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Ferner sei $r \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge

$$(n^r q^n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Aufgabe 4
Sei $a > 0$. Berechnen Sie folgende Grenzwerte

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$, b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$.

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}$$

gegen einen Grenzwert im Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$ konvergiert.

Aufgabe 6
Geben Sie Beispiele für Nullfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, so dass

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c, \qquad$ wobei $c \in \mathbb{R}$,

b) $(\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, aber nicht konvergent ist.

Aufgabe 7
Sei $d > 1$. Bestimmen Sie den Grenzwert der rekursiv definierten Folge

$$a_0 = 0\,, \; a_{n+1} = \frac{1}{d}(a_n + 1) \;\text{ für } n \geq 0\,.$$

Aufgaben 8
Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ die Folge der *Fibonacci-Zahlen*. Es gilt daher

$$a_0 = 1\,, \; a_1 = 1 \;\text{ und }\; a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ für } n \geq 2\,.$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$a_n \geq n \text{ für alle } n \geq 0\,.$$

Aufgabe 9
Berechnen Sie folgende Summen

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{8})^{n-1}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4(-\frac{2}{5})^{n-1}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{10})^{n-1}$.

Aufgabe 10

Sei $a > 0$, $b > 1$ und $k \in \mathbb{N}$. Stellen Sie fest, ob die folgenden Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergieren, falls

a) $x_n = (-1)^n \dfrac{n}{2n+1}$, b) $x_n = \dfrac{n+4}{n^3}$, c) $x_n = \dfrac{10^{n-1}}{(n-1)!}$,

d) $x_n = \dfrac{1}{n \cdot 2^n}$, e) $x_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$, f) $x_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$,

g) $x_n = \dfrac{n^k}{b^n}$, h) $x_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$, i) $x_n = (-1)^n (1 - \sqrt[n]{a})$,

j) $x_n = \dfrac{1}{10^n + 1}$, k) $x_n = (-1)^{n+1} \dfrac{2^n}{n}$, l) $x_n = (-1)^{n-1} \dfrac{1}{2n-1}$,

m) $x_n = (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n^2}$, n) $x_n = \dfrac{n(2 + \sin n)}{\sqrt{n^4 + 1}}$.

Aufgabe 11

Welche der folgenden Aussagen ist richtig, welche falsch?

a) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, dann ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

b) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist, dann ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

c) Wenn die Folge der Partialsummen $(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, dann ist sie auch konvergent.

d) Wenn die Folge der Partialsummen $(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist, dann ist sie auch divergent.

e) Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1$ ist, dann ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

f) Wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ absolut.

Aufgabe 12

Bestimmen Sie den Konvergenzbereich und Konvergenzradius der Potenzreihen $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ mit

a) $f_n(x) = nx^n\,,$ b) $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^n}{n}\,,$

c) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{2^n}\,,$ d) $f_n(x) = \dfrac{n}{n+1}x^n\,,$

e) $f_n(x) = (-1)^{n-1}x^{2(n-1)}$ f) $f_n(x) = \dfrac{n}{e^n+1}(x-1)^n\,.$

Untersuchen Sie hierzu auch das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzbereichs.

Aufgabe 13

Differenzieren Sie folgende Funktionen

$$f : D \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x)$$

mit

a) $f(x) = 5x^6 + 3x^4 - x\,,$ b) $f(x) = (x^2-1)(x+3)\,,$ c) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}\,,$

d) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 10x^{-2} + 2\,,$ e) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}\,,$ f) $f(x) = \dfrac{x^3}{1-2x}\,,$

g) $f(x) = \dfrac{4}{(1-2x)^2}\,,$ h) $f(x) = (\dfrac{1}{x} + \cos x)^2\,,$ i) $f(x) = \dfrac{1}{1+\tan x}\,,$

j) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}\,,$ k) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\ln(1+x)}\,,$ l) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}\,,$

m) $f(x) = x\exp(-x)\,,$ n) $f(x) = x\exp(-x^2)\,,$ o) $f(x) = \exp(-\dfrac{x^2}{2})\,.$

Aufgabe 14

Bestimmen Sie die relativen Extremwerte von

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}\,,$

b) $f(x) = x^2\exp(-0,5\,x)\,.$

Aufgabe 15
Diskutieren Sie

a) $\dfrac{-5x^2+5}{x^3}$,

b) $\cos^3 x + \sin^3 x$,

c) $f(x) = 2x \ln|x|$.

Aufgabe 16
Bestimmen Sie jeweils das Taylor-Polynom dritten Grades von f zu Entwicklungspunkt x_0, wobei

a) $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto f(x) := \ln x\,,\ x_0 = 1\,,$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto f(x) := \sinh x\,,\ x_0 = 0\,,$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto f(x)\,,\ x_0 = 0$, mit einer beliebig oft differenzierbaren Funktion für die

$$f'(x) = x + \sin(f(x)) \text{ und } f(0) = \frac{\pi}{2}$$

gilt.

Aufgabe 17
Bestimmen Sie die Taylor-Reihe für

a) die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(\frac{x}{2})\,,$$

mit Entwicklungspunkt $x_0 = 2$,

b) die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cosh x\,,$$

mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$,

c) die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln x\,,$$

mit Entwicklungspunkt $x_0 = 2$.

Aufgabe 18
Bestimmen Sie das Taylor-Polynom neunter Ordnung für

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\,,$$

zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und vergleichen Sie den damit erhaltenen Näherungswert für $f(x = 0,2)$ mit dem exakten Wert.

Aufgabe 19
Berechnen Sie folgende Grenzwerte mittels Taylor-Reihen:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\exp x - 1}\,,$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\ln(1+x))^2}{\cos x - 1}\,,$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x\sin x}\right),$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{\arcsin x}\,,$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\exp x}{1-\exp x}\,,$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - x\ln(1+x)}{\sin(x^3)}\,.$

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ Körper der rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$ Körper der reellen Zahlen

$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$

$\mathbb{R}^* := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash \{0\}$

$\mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$

$\mathbb{C}$ Körper der komplexen Zahlen

$\mathbb{C}^* := \{z \in \mathbb{C} \,|\, z \neq 0\} = \mathbb{C} \backslash \{0\}$

Literatur

[1] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, B. G. Teubner, Nauka

[2] G. Fischer, *Lineare Algebra*, Vieweg

[3] W. Fischer, I. Lieb, *Funktionentheorie*, Vieweg

[4] O. Forster, *Analysis 1*, Vieweg

[5] S. Großmann, *Mathematischer Einführungskurs für die Physik*, B. G. Teubner

[6] K. Jänich, *Lineare Algebra*, Springer-Verlag

[7] R. Remmert, *Funktionentheorie 1*, Springer-Verlag

[8] F. Reinhardt, H. Soeder, *dtv-Atlas zur Mathematik*, Deutscher Taschenbuch Verlag